

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

31. Band, Heft 8

10. November 1949

S. 337—384

Geschichte.

Freudenthal, Hans: Wie haben die Alten gerechnet? Euclides, Groningen 24, 12—34 (1948) [Holländisch].

Verf. untersucht die antiken Wurzelapproximationen und die Archimedischen Werte für π , wobei er sich hauptsächlich mit 2 Veröffentlichungen von E. M. Bruins [Openbare Les „*Mathematici en Physici*“, Euclides, Groningen 20, 1—22 (1943) u. dies. Zbl. 30, 97] gründlich und kritisch — ohne aber dabei das Positive zu verschweigen — auseinandersetzt. — In I werden untersucht die von Heron [Metrica I, 26] mitgeteilten Archimedischen Werte $\frac{211875}{67441} < \pi < \frac{197888}{62351}$, von denen der erste als mathematisch falsch (da auch obere Schranke), der zweite als historisch falsch (da schlechter als $3\frac{1}{7}$) bezeichnet wird. Die von Tannery und Heiberg vorgeschlagenen korrigierten Werte lehnt Verf. ab. Er wendet sich auch mit guten Gründen gegen den von Bruins vorgeschlagenen Berechnungsweg, der auf einer angeblichen Archimedischen Näherung $\sqrt{2} > \frac{1093}{773}$ aufbaut und eine ebenfalls hypothetische „Archimedische“ Abschätzung $\sqrt{773^2 + 1866^2} > 1866 + \frac{1}{16} \cdot (1866 + 773)$ verwendet. Verf. stellt eine eigene neue Erklärung in Aussicht (S. 14). — In II wendet sich der Verf. gegen die Legendenbildung in der mathematischen Geschichtsschreibung, insbesondere ist Archimedes kein „äußerst mäßig begabter Rechner“ gewesen. — In III befaßt sich Verf. mit den babylonischen Formeln und dem recht unbestimmten Faktor λ bei Bruins [s. Referat zum 2. Aufs., § 1, dies. Zbl. 30, 97], dann mit den Näherungen $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ aus der Kreismessung des Archimedes. Das von Bruins angenommene Verfahren, aus der berechneten oberen Schranke $3\frac{1}{7}$ über $3\frac{10}{71}$ die untere $3\frac{10}{71}$ auszusuchen und zu verifizieren, ist — wie Verf. betont — nirgends in der antiken Literatur zu finden. Dann geht Verf. nochmals auf die Heronischen Werte (s. I) ein, von denen der falsche „untere“ Wert von Bruins inzwischen aufgegeben wurde. — In IV macht Verf. bemerkenswerte Ausführungen über die strenge Kritik, die notwendig ist, wenn man historisch-mathematische Gegebenheiten durch hypothetische mathematische Überlegungen zu rekonstruieren versucht.

Kurt Vogel (München).

● **Galilei, Galileo:** *Dialoghi dei massimi sistemi. II-III giornata. A cura di Guido Castelnuovo. Introduzione di Federigo Enriques.* Roma: Sandron 1947. 499 p.

Diese Wiedergabe nach dem Text in Band XII der von A. Favaro besorgten Edizione nazionale beschränkt sich auf das Wesentliche, nämlich auf den 2. und 3. Tag (Darstellung des Copernicanischen Systems und Beweise auf Grund der Beobachtung der Sonnenflecken). Die kritische Auseinandersetzung mit Aristoteles (1. Tag) ist beiseite gelassen, ebenso die verfehlt Gezeitentheorie (4. Tag). Die schon 1945 verfaßte Einleitung von F. Enriques (1871—1946) gibt eine allgemeine Einführung in Galileis Denkweise und wird durch kurze biographische Angaben ergänzt; 4 kurze sachliche Noten sind bei der interessanten Entwicklungsgeschichte des Werkes reichlich knapp.

J. E. Hofmann (Karlsruhe).

Conforto, Fabio: *La geometria proiettiva: Suo sviluppo storico e suo significato.* Archimede, Firenze 1, 7—17 (1949).

Im ersten Abschnitt schildert der Verf. die Anfänge der projektiven Geometrie. Ausgehend von einigen Sätzen bei Euklid und Apollonius entwickeln sich die Regeln der Perspektive bei den italienischen Malern und Architekten des 15. und 16. Jahrhunderts. Desargues und Pascal legen im 17. Jahrhundert durch ihre

bekannten Sätze den Grund zur mathematischen Begriffsbildung; aber ihre Betrachtungsweise kann sich zunächst nicht durchsetzen und weiter entwickeln, weil das Interesse der Mathematiker auf analytische Geometrie und Infinitesimalrechnung gerichtet ist. Im 18. Jahrhundert erfolgt nochmals von der technischen Seite her ein kräftiger Anstoß durch Monge in seiner Darstellenden Geometrie. Aber erst das 19. Jahrhundert bringt die Geburt der projektiven Geometrie mit Poncelets „*Traité des propriétés projectives des figures*“. — Der zweite Abschnitt behandelt die Entwicklung in Frankreich (Poncelet, Gergonne, Chasles) und Deutschland (Möbius, Plücker, Steiner, Reye und von Staudt) und kennzeichnet die wesentlichen Grundgedanken und Begriffsbildungen dieser Gelehrten. — Im dritten Abschnitt wird die Weiterbildung der projektiven Geometrie in Italien, insbesondere durch Cremona, Segre, Enriques und Severi, geschildert. Im Anschluß an deutsche Arbeiten tragen diese Gelehrten Wesentliches zur axiomatischen Grundlegung bei. — Der vierte Abschnitt behandelt die Bedeutung der projektiven Geometrie für die allgemeine Geschichte der Mathematik. Verf. hebt ihren Zusammenhang mit Kunst, Architektur und Technik hervor, weist hin auf die Bereicherungen der mathematischen Begriffsbildung, die der projektiven Geometrie zu danken sind (Transformationen, Korrelationen, Korrespondenzen, Invarianten, Polarität, Nullsysteme, mehrdimensionale Räume, algebraische Geometrie), auf ihre Bedeutung für die axiomatische Methode und auf die implizite Definition der Grundbegriffe durch Postulate (abstrakte Geometrie). Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ wären nicht möglich gewesen, wenn nicht das Muster der axiomatisch begründeten projektiven Geometrie vorhanden gewesen wäre. — Die Arbeit enthält keine neuen Erkenntnisse, aber sehr anregende Hinweise auf die Wechselwirkungen zwischen Mathematik und allgemeiner Kulturgeschichte und auf die Entwicklungsgeschichte mathematischer Begriffsbildungen. *E. Löffler.*

Philosophie. Logik.

Maak, Wilhelm: Goethe [und die Mathematik. Math.-phys. Semesterber., Göttingen 1, 138—149 (1949).

Eine auf einem erkennbaren Nachdenken über das Wesen der Mathematik und einer eben so erkennbaren Beschäftigung mit Goethe fußende Studie mit der Konzentration auf die Frage, was ein Mathematiker auf der Stufe des gegenwärtigen Zeitalters zu Goethe zu sagen hat. *Heinrich Scholz* (Münster).

Bouligand, G.: Sur une doctrine de la connaissance mathématique et ses incidences historiques. Arch. internat. Hist. Sci., Paris 28, 291—302 (1948).

Die Unmöglichkeit, die deduktiven Wissenschaften in einem formalen System zu erfassen, veranlaßt Verf., eine vergleichende Wissenschaftslehre zu skizzieren, deren Thema nicht so sehr die Diskussion der Grundlagen, sondern eine Entwicklungsgeschichte der mathematischen Begriffe sein soll. [Vgl. auch dies. Zbl. 30, 115.] *G. Hasenjaeger* (Münster).

Russell, B.: Postulates of scientific inference. Proc. 10. internat. Congr. Philos., Amsterdam 1948, 1, 33—41 (1949).

In diesem Kongreßvortrag diskutiert Bertrand Russell die Frage: „What must we be supposed to know, in addition to particular observed facts, if scientific inferences are to be valid?“ „Scientific inference“ ist in diesem Falle das induktive Schließen, und zwar in seinen elementarsten Formen; denn „advanced science is built on elementary science, and elementary science is built on common sense“. Als Grundlage für die *comme-sense*-Induktionen werden fünf Postulate formuliert. Die drei ersten sollen das Schließen auf die Existenz von Dingen im Sinne von genidentischen Gegebenheiten (Zusatz des Ref.) begründen, die beiden letzten, wenn ich zutreffend interpretiere, die elementarsten Kausalaussagen. Es geht

also um eine Konstituierung des primitiven Substanz- und Kausalbegriffs. Der provisorische Charakter wird mehrfach betont. *Heinrich Scholz* (Münster).

Curry, H. B.: *Languages and formal systems.* Proc. 10. internat. Congr. Philos., Amsterdam 1948, 2, 770—772 (1949).

Was ist eine formalisierte Sprache? Wie kommt sie zustande? Wie sind ihre Grammatik, ihre Syntax, ihre Semantik gegeneinander abzugrenzen? Mit dem Grad von Pünktlichkeit, der in einem Kongreßbericht überhaupt erreichbar ist, deutet der Verf. seine Antworten an, mit Auseinandersetzung mit R. Carnap. Es ist erkennbar, daß dieser Bericht das Resultat eines langen Nachdenkens ist, und zu wünschen, daß dieser Mitteilung eine wesentlich erweiterte Darstellung folgt, die auch auf die bis jetzt, so weit ich sehe, noch nirgends diskutierte Frege'sche Semantik Bezug nimmt. Es scheint vergessen worden zu sein, mit welcher Sorgfalt Frege die Mittel bereit gestellt hat, mit deren Hilfe gezeigt werden kann, daß jeder Satz seiner Begriffsschrift ein Name für das Wahre ist. *Heinrich Scholz.*

Kokoszynska, Maria: *On a certain condition of a semantical theory of science.* Proc. 10. internat. Congr. Philos., Amsterdam 1948, 2, 773—775 (1949).

Vorgegeben seien zwei Sprachen S_1, S_2 , S_1 an Ausdrucksmitteln reicher als S_2 . Wann sprechen sie über dieselben Objekte? Die Verf. deutet eine Antwort an, aus der sich ergibt, daß dies stets dann behauptet werden kann, wenn $S_1 - S_2$ enthält in demselben Sinne wie die Theorie der reellen Zahlen die der Rationalzahlen, also stets dann, wenn S_2 zu einem Teil von S_1 in einem für diesen Zweck näher zu bestimmenden Sinne isomorph ist. *Heinrich Scholz* (Münster).

Feys, Robert: *L'abstraction en logique formalisée.* Proc. 10. internat. Congr. Philos., Amsterdam 1948, 2, 731—734 (1949).

Die formalisierte Logik, auf ihrer gegenwärtigen Stufe, macht von zwei Arten von Abstraktionen Gebrauch, den klassen- und den funktionserzeugenden. Beide gehen auf Frege zurück. Die funktionserzeugenden Abstraktionen lassen sich mit Hilfe der klassenerzeugenden darstellen, und umgekehrt. Den ersten Weg sind die „Principia“ gegangen. Der zweite ist, mit der Schöpfung des Lambda-Kalküls, von A. Church beschritten worden. Quine hat gezeigt, wie beide Methoden nebeneinander verwendet werden können. Der Verf. deutet an, warum er geneigt ist, dem Lambda-Operator den Vorzug zu geben, und beiläufig, wie man ein Äquivalent für gewisse Abstraktionen in der kombinatorischen Logik (H. B. Curry) durch Abbau erhält. *Heinrich Scholz* (Münster).

Mostowski, Andrzej: *On a set of integers not definable by means of one-quantifier predicates.* Ann. Soc. Polonaise Math. 21, 114—119 (1948).

Eine Fortsetzung zu Verfassers „On definable sets of positive integers“ [dies. Zbl. 31, 194; dort auch die Terminologie]. Für Systeme S , die der Rekursivitätsbedingung genügen, wird gezeigt: Der kleinste Mengenkörper $R_1^{(n)}$, der $P_1^{(n)} + Q_1^{(n)}$ umfaßt, ist echt enthalten in $P_2^{(n)} \cdot Q_2^{(n)}$. Beweis: Eine Form des Cantorschen Diagonalverfahrens liefert eine n -dimensionale Menge A , die in $P_2^{(n)} \cdot Q_2^{(n)}$, aber nicht in $R_1^{(n)}$ liegt. *G. Hasenjaeger* (Münster).

Algebra und Zahlentheorie.

Gruppentheorie:

Hall jr., Marshall and Tibor Radó: *On Schreier systems in free groups.* Trans. Amer. math. Soc. 64, 386—408 (1948).

Sei \mathfrak{F} die freie Gruppe mit den (endlich oder abzählbar vielen) Erzeugenden S_i . Ein Schreier-System für \mathfrak{F} nennen die Verf. eine Menge von Worten, die das leere Wort und mit jedem reduzierten Wort $G = S_{i_1}^{\varepsilon_1} S_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots S_{i_r}^{\varepsilon_r}$, $\varepsilon_q = \pm 1$ auch alle Anfangs-Abschnitte $S_{i_1}^{\varepsilon_1} S_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots S_{i_q}^{\varepsilon_q}$, $q = 1, 2, \dots, r-1$, enthält. Wir werden F

für ein beliebiges Element von \mathfrak{F} , S für eine beliebige Erzeugende, und G für ein beliebiges Element eines Schreier-Systems für \mathfrak{F} schreiben. — In dem ersten Beweis, daß jede Untergruppe einer freien Gruppe frei ist [Abh. math. Sem. Hansische Univ. 5, 161—183 (1927)], zeigte O. Schreier, daß man für jede Untergruppe \mathfrak{U} von \mathfrak{F} ein Repräsentanten-System der linken Nebengruppen so auswählen kann, daß sie — in der gegenwärtigen Terminologie — ein Schreier-System bilden, sogar so, daß, wenn ein G diesem System angehört, in der ganzen Nebenklasse $\mathfrak{U}G$ kein kürzeres Wort als G liegt („kürzestes Schreier-System“). Bezeichnet man für jedes \mathfrak{F} seinen Repräsentanten (mod \mathfrak{U}) in einem solchen Schreier-System mit $\Psi[F]$ und bildet man die Elemente der Form $U = GS \cdot [\Psi[GS]]^{-1}$, so sind die verschiedenen unter den $U \neq 1$ ein System freier Erzeugender für \mathfrak{U} . — Diese Vertreter-Funktion $\Psi[F]$ ist ein Beispiel einer für das Schreier-System $\mathfrak{G} = [g_i]$ „zulässigen“ Funktion Φ , die allgemein so definiert wird: 1. Sie ist erklärt für alle Elemente der Form $H = GS^\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$. 2. Ihre Werte $\Phi(H)$ liegen in \mathfrak{G} . 3. Wenn H in \mathfrak{G} liegt, also $H = g_i S_j^\varepsilon = g_k$, dann ist $\Phi(H) = g_k$. 4. Für alle Wahlen von G, S, ε ist $\Phi[\Phi(GS^\varepsilon) \cdot S^{-\varepsilon}] = G$. Ein Schreier-System \mathfrak{G} soll zu einer Untergruppe \mathfrak{U} von \mathfrak{F} assoziiert heißen, wenn jede linke Nebengruppe von \mathfrak{U} (mod \mathfrak{F}) genau ein Element des Schreier-Systems enthält. Eine Untergruppe bestimmt also vermittle einer zulässigen Funktion ein assoziiertes Schreier-System. Die Verff. behandeln nun die umgekehrte Aufgabe: Gibt es zu einem vorgelegten Schreier-System eine Untergruppe, zu der es assoziiert ist? Sie beweisen, daß dies bei einem endlichen System immer der Fall ist, bei einem unendlichen System aber dann und nur dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Für jedes S ist die Anzahl der Elemente der Form GS , die nicht dem System \mathfrak{G} angehören, gleich der Anzahl der Elemente der Form GS^{-1} , die nicht dem System \mathfrak{G} angehören; also beide unendlich, oder beide endlich und gleich. Für jedes Schreier-System, das diese Bedingung erfüllt, geben die Verff. ein bestimmtes Verfahren an, das sämtliche zulässigen Funktionen aufzustellen gestattet. Ein Schreier-System, zusammen mit einer zulässigen Funktion, bestimmt dann in eindeutiger Weise eine Untergruppe, zu der es assoziiert ist, und jede Untergruppe von \mathfrak{F} kann so erhalten werden. — Schließlich behandeln die Verff. im Falle einer endlichen Zahl von Erzeugenden Zusammenhänge zwischen kürzesten Schreier-Systemen, die zu einer Untergruppe \mathfrak{U} assoziiert sind, und einem „reduzierten“ System von Erzeugenden für \mathfrak{U} im Sinne von J. Nielsen [Mat. Tidsskr. B 1921, 77—94].

K. A. Hirsch (Newcastle-upon-Tyne).

Hall jr., Marshall: Subgroups of finite index in free groups. Canadian J. Math. 1, 187—190 (1949).

Verf. verwendet die Theorie der Schreier-Systeme in freien Gruppen (vgl. vorsteh. Referat) zu numerischen Aussagen über Untergruppen von endlichem Index in freien Gruppen. Jede Untergruppe \mathfrak{U} ist eindeutig bestimmt durch ein Schreier-System \mathfrak{G} und eine zulässige Funktion $\Phi(H)$: $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathfrak{G}, \Phi(H))$. Dies ist die „Standard“-Darstellung von \mathfrak{U} . Die Elemente g_i von \mathfrak{G} sind Repräsentanten der linken Nebenklassen von \mathfrak{U} , und wenn $l(g_i)$ die Länge des reduzierten Wortes g_i bedeutet, so sei $L = \sum_{i=1}^n l(g_i)$ die „Gesamtlänge“ des Vertretersystems. Die Anzahl der freien Erzeugenden von \mathfrak{U} ist bekanntlich $N = n(r-1) + 1$. Wenn u_1, u_2, \dots, u_N ein „Standard“-Erzeugenden-System von \mathfrak{U} ist und $l(u_k)$ die Länge des reduzierten Wortes u_k , so sei $K = \sum_{k=1}^N l(u_k)$ die „Gesamtlänge“ des Erzeugenden-Systems. Verf. beweist dann die folgende Beziehung: $K = (2L + n)r - 2L$. — Für die Gesamtzahl $N_{n,r}$ der Untergruppen vom Index n in der freien Gruppe von r Erzeugenden wird die folgende Rekursionsformel aufgestellt:

$$N_{1,r} = 1; \quad N_{n,r} = n(n!)^{r-1} - \sum_{i=1}^{n-1} [(n-i)!]^{r-1} N_{i,r}. \quad K. A. Hirsch.$$

Zappa, Guido: Sui sottogruppi finiti dei gruppi di Hirsch. *Giorn. Mat. Battaglini* 78, 55—70 (1948).

Die Untersuchung von unendlichen auflösbaren Gruppen mit Maximalbedingung für Untergruppen wurde vom Ref. begonnen [*Proc. London math. Soc.*, II. s. 44, 53—60 (1937); 44, 336—344 (1938); 49, 184—194 (1946); dies. Zbl. 18, 145; 19, 156]. Solche Gruppen besitzen Reihen von Untergruppen $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_e = 1$ analog zu (I) Kompositionsreihen: G_i Normalteiler von G_{i+1} und G_i/G_{i+1} zyklisch und, falls endlich, von Primzahlordnung; (II) Hauptreihen: G_i Normalteiler von G und G_i/G_{i+1} eine freie oder elementare Abelsche Gruppe [d. h. von der Ordnung p^r , p Primzahl, und vom Typ $(1, 1, \dots, 1)$]. — Die unendlichen Faktorgruppen für je zwei solcher Reihen erweisen sich unschwer nach dem Schreierschen Verfeinerungssatz als paarweise isomorph. Die endlichen Faktorgruppen brauchen natürlich nicht isomorph zu sein (eine Reihe kann z. B. überflüssige Glieder enthalten), und man muß sich jedenfalls zumindest auf Reihen minimaler „Länge“ beschränken. Insbesondere wurde vom Ref. bewiesen, daß, wenn die Gruppe G nilpotent ist, alle Elemente endlicher Ordnung eine charakteristische Untergruppe bilden, so daß in diesem Fall für Kompositions- und Hauptreihen minimaler Länge das volle Analogon zum Jordan-Hölderschen Satz besteht. — Dieses Ergebnis wurde vom Verf. in einer früheren Arbeit [*Rend. Sem. mat. Univ. Padova* 12, 1—11 (1941); dies. Zbl. 26, 55] auf sogenannte „über-auflösbare“ Gruppen (d. h. Gruppen, deren Hauptreihen nur zyklische Faktoren enthalten) übertragen. Hier bilden alle Elemente ungerader Ordnung eine charakteristische Untergruppe, und da nun in je zwei Reihen minimaler Länge die unendlichen und die ungeraden Faktoren paarweise isomorph sind, muß dasselbe auch von den übrigbleibenden Faktoren der Ordnung 2 gelten. — In der vorliegenden Arbeit behandelt der Verf. weitere Kategorien von unendlichen auflösbaren Gruppen mit Maximalbedingung. Satz I. Wenn die Maximalzahl unabhängiger Erzeugender in den freien Abelschen Gruppen einer Hauptreihe k ist und die endlichen Faktoren keine Primzahlen $\leq k+1$ enthalten, so bilden alle Elemente endlicher Ordnung in G eine charakteristische Untergruppe. Dies liegt im wesentlichen daran, daß Automorphismen endlicher Ordnung für eine freie Abelsche Gruppe von k Erzeugenden nur Primzahlen $\leq k+1$ als Teiler der Ordnung enthalten. — Satz II. Wenn die (endlichen und unendlichen) Faktoren einer Hauptreihe höchstens zwei Erzeugende besitzen, so bilden die Elemente endlicher Ordnung, soweit sie zu 2 und 3 teilerfremd sind, eine charakteristische Untergruppe. Dies beruht darauf, daß die zyklischen Gruppen der Ordnungen 2 und 3 und die elementaren Abelschen der Ordnungen 4 und 9 Automorphismen-Gruppen (der Ordnungen 1, 2, 6 und 48) besitzen, die wiederum nur die Primteiler 2 und 3 enthalten. Der Satz läßt sich nicht auf mehr als zwei Erzeugende übertragen: die elementare Abelsche Gruppe der Ordnung 8 hat als Automorphismen-Gruppe die einfache Gruppe der Ordnung 168. — In dem letzten Teil der Arbeit untersucht Verf. die Sylow-Gruppen der über-auflösbaren Gruppen. Die zur Primzahl 2 gehörigen verursachen erhebliche Schwierigkeiten. *K. A. Hirsch* (Newcastle).

Delsarte, S.: Fonctions de Möbius sur les groupes abéliens finis. *Ann. Math.*, Princeton, II. s. 49, 600—609 (1948).

Sind x und y abelsche Gruppen, so bedeute $y|x$, daß y eine Untergruppe von x ist. Die Möbiussche Funktion $\mu(x)$ für abelsche Gruppen wird eindeutig definiert durch

$$\sum_{d|x} \mu(d) = \delta(x),$$

wo $\delta(x) = 1$, wenn x nur aus dem Einselement besteht, und $\delta(x) = 0$ in allen übrigen Fällen. Ist $f(x)$ irgendeine für abelsche Gruppen definierte Funktion

und setzt man

$$\sum_{d|x} f(d) = F(x),$$

so wird

$$f(x) = \sum_{d|x} F(d) \mu\left(\frac{x}{d}\right),$$

wo x/d die Faktorgruppe von x nach d bedeutet. Für abelsche Gruppen x und y mit relativ primen Ordnungen wird $\mu(xy) = \mu(x)\mu(y)$, wo xy das direkte Produkt bedeutet. Daher braucht $\mu(x)$ nur für Gruppen von Primzahlpotenzordnung explizit bestimmt zu werden. Man erhält für elementare abelsche Gruppen der Ordnung p^m den Wert $\mu(x) = (-1)^m p^{\frac{1}{2}m(m-1)}$. Gibt es dagegen mindestens ein Element der Ordnung p^2 , so wird $\mu(x) = 0$. Für zyklische Gruppen erhält man die gewöhnliche Möbiussche Funktion. — Es mögen bedeuten: $\mathfrak{N}(x; y)$ die Anzahl der homomorphen Abbildungen von x in y , $\Phi(x)$ die Anzahl der Automorphismen von x , $N(x; y)$ die Anzahl der zu x isomorphen Untergruppen von y . Dann besteht folgende Relation

$$\Phi(x) N(x; y) = \sum_{d|x} \mu\left(\frac{x}{d}\right) \mathfrak{N}(d; y).$$

Für Gruppen von Primzahlpotenzordnung werden explizite Formeln angegeben: In einer Basis von x gebe es r_k Elemente der Ordnung p^k , $r_{k-1} - r_k$ Elemente der Ordnung p^{k-1} , ..., $r_1 - r_2$ Elemente der Ordnung p . Dann heißt (r_1, r_2, \dots, r_k) die Signatur von x . Einer Signatur können auch noch Nullen am Ende angefügt werden. Sind (r_1, \dots, r_k) bzw. (s_1, \dots, s_k) die Signaturen von x bzw. y , so wird

$$\mathfrak{N}(x; y) = p^{r_1 s_1 + \dots + r_k s_k}.$$

Ferner erhält man

$$\Phi(x) = p^{\frac{1}{2} r_1 (r_1 - 1) + r_1 r_2 + \dots + r_{k-1} r_k} \prod_m (X_m(p))^{[(r_1 - r_2)/m] + [(r_2 - r_3)/m] + \dots + [r_k/m]},$$

wo $X_m(\xi)$ das m -te Kreisteilungspolynom bedeutet. Schließlich sei $\varkappa_{i_1, i_2, \dots, i_k} = \sum \mu(x/d)$, wo die Summe über alle Untergruppen d der Signatur (i_1, i_2, \dots, i_k) von x zu erstrecken ist. Man setze $\mathfrak{F}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) = \sum \varkappa_{i_1, i_2, \dots, i_k} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_k^{i_k}$.

Dann wird $N(x; y) = \frac{\mathfrak{F}(p^{s_1}, \dots, p^{s_k})}{\mathfrak{F}(p^{r_1}, \dots, p^{r_k})}$.

R. Kochendörffer (Greifswald).

Neumann, B. H.: On ordered groups. Amer. J. Math. 71, 1—18 (1949).

1. Wenn es möglich ist, in der Gruppe G eine (algebraische) Ordnung einzuführen, so folgt aus $[a^m, b] = 1$ und $m \neq 0$ auch $[a, b] = 1$; und es folgt aus $[a^m, b], a] = 1$ und $m \neq 0$ auch $[[a, b], a] = 1$. Hierbei ist $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. — 2. In der Gruppe G kann eine (algebraische) Ordnung eingeführt werden, wenn es eine durch die Relation des Enthaltenseins geordnete Kette von Normalteilern H_σ von G mit den folgenden Eigenschaften gibt: (a) Jedes der H_σ mit Ausnahme von $\{1\}$ hat einen unmittelbaren Nachfolger $H_{\sigma'}$; $[G, H_\sigma] \subset H_\sigma$ und $H_\sigma/H_{\sigma'}$ enthält kein Element endlicher Ordnung außer 1. (b) Gibt es unter den H_σ ein erstes H_1 , so kann G/H_1 (algebraisch) geordnet werden. (c) Zu jedem Element $g \neq 1$ in G (oder in H_1 , wenn dieses existiert) gibt es ein σ , so daß g in H_σ , aber nicht in $H_{\sigma'}$ enthalten ist. — 3. Ist N ein Normalteiler der freien Gruppe F , so läßt sich jede (algebraische) Ordnung von F/N zu einer von F erweitern. — 4. Ein Beispiel einer (algebraisch) geordneten Gruppe, die mit ihrer Kommutatorgruppe identisch ist, wird angegeben.

Reinhold Baer (Urbana, Illinois/USA).

Ringe. Körper:

Eilenberg, Samuel: Topological methods in abstract algebra. Cohomology theory of groups. Bull. Amer. math. Soc. 55, 3—37 (1949).

Dies ist ein ausgezeichnete Bericht über den gegenwärtigen Stand der Theorie der Kohomologiegruppen algebraischer Systeme [Gruppen, Algebren], die sich in

letzter Zeit so mächtig entwickelt hat. Es wird berichtet über die Definitionen, die Interpretationen der verschiedendimensionalen Kohomologiegruppen, die Sätze, die höher-dimensionale Kohomologiegruppen auf solche niedriger Dimension [aber für andere Strukturen] zurückführen; und schließlich werden Anwendungen (Galoissche Theorie) und die Zusammenhänge mit der Topologie diskutiert. — Ausführliches Literaturverzeichnis, so daß der Bericht als Einführung in das Gebiet dienen kann.

Reinhold Baer (Urbana, Illinois/USA).

Eilenberg, Samuel and Saunders MacLane: Cohomology and Galois theory.

I. Normality of algebras and Teichmüller's cocycle. Trans. Amer. math. Soc. **64**, 1—20 (1948).

MacLane, Saunders: A nonassociative method for associative algebras. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 897—902 (1948).

Das Hauptziel dieser Arbeiten ist die Einordnung einer Teichmüllerschen Untersuchung [Deutsche Math. **5**, 138—149 (1940); dies. Zbl. **23**, 198] in die Kohomologietheorie der Gruppen [für eine zweckmäßige Darstellung der Grundbegriffe dieser Theorie vgl. etwa S. Eilenberg im vorsteh. Referat]. Ist Q eine endliche Automorphismengruppe des Körpers N mit Invariantenkörper P , so heiße die über N zentral-einfache Algebra A Q -normal, wenn jeder Automorphismus aus Q in N durch einen Automorphismus von A induziert wird. Ist A irgendeine Q -normale Algebra, $w(q)$ ein q aus Q in N induzierender Automorphismus von A , so ist $w(q') w(q'') w(q'q'')^{-1}$ ein innerer Automorphismus von A , der durch ein Element $b(q', q'')$ aus A induziert werde. Sind q, q', q'' Elemente in Q , so ist

$$t(q, q', q'') = b(q', q'')^{w(q)} b(q, q'q'') b(qq', q'')^{-1} b(q, q')^{-1}$$

ein Element in N . Man erhält auf diese Weise einen Homomorphismus T der Gruppe der Q -normalen Algebrenklassen in die dritte Kohomologiegruppe $H^3(Q, N)$ von Q in N . Der Kern dieses Homomorphismus T besteht aus all den Algebrenklassen, die durch skalare Erweiterung von über P zentral-einfachen Algebren erhalten werden. Der Kozyklus $f(q, q', q'')$ von Q in N repräsentiert eine Klasse aus dem Bildbereich von T , wenn es einen N enthaltenden, über P endlich-normal-separablen Körper K mit folgenden Eigenschaften gibt: Ist G die Galoissche Gruppe von K über P , und ist die Funktion $f^*(g_1, g_2, g_3)$ für g_i in G durch die Regel

(*) $f^*(g_1, g_2, g_3) = f(g_1^*, g_2^*, g_3^*)$ mit $g_i^* =$ dem durch g_i in N induzierten Automorphismus definiert, so gehört h der Nullklasse von $H^3(G, K)$ an. — Der Hauptschritt im Beweise dieses Satzes besteht im Nachweis der Gültigkeit des folgenden wichtigen Satzes: Es sei $A = (f, S, K)$ ein verschränktes Produkt des (N enthaltenden, über P endlich-normal-separablen) Körpers K mit der Gruppe S der N elementweise invariant lassenden Automorphismen und dem Faktorensystem f von S in K . Weiter sei t ein Kozyklus von Q in N . Dann und nur dann bildet der Homomorphismus T die Algebrenklasse von A auf die Klasse von t in $H^3(Q, N)$ ab, wenn es eine K -wertige, für g_i in G definierte Funktion $h(g_1, g_2)$ mit folgenden Eigenschaften gibt: $h(s_1, s_2) = f(s_1, s_2)$ für s_i in S ; und der „Korand“ von h ist genau die nach der Regel (*) zu t gehörige Funktion.

Reinhold Baer (Urbana, Illinois/USA).

Eilenberg, Samuel: Extensions of general algebras. Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 125—134 (1948).

Unter einer Algebra über dem Körper F sei ein Vektorraum A über F verstanden, in dem eine bilineare Multiplikation ab definiert ist. Sei σ ein Homomorphismus der Algebra E über F auf die Algebra A über F mit der speziellen Eigenschaft, daß das Quadrat des Kerns K von σ Null ist. Ist dann a in A , k in K , so ist $(a\sigma^{-1})k$ ein eindeutig bestimmtes Element ak in K ; und ka wird entsprechend definiert. (E, σ) ist dann eine die Darstellungen ak und ka realisierende Erweiterung von K durch A . Auswahl von Repräsentanten in den Restklassen von E modulo K führt zu einem Faktorensystem $f(a, b)$, einer Bilinearform über A mit Werten in

K ; und zwei solche Bilinearformen gehören dann und nur dann zur gleichen Erweiterung, wenn die Differenz die Form: $ah(b) - h(ab) + h(b)a$ hat, wo $h(x)$ eine K -wertige Funktion von A ist. Man kann dann in üblicher Weise den Vektorraum der Erweiterungen definieren und seine Isomorphie mit einer zweiten Kohomologiegruppe erweisen. — Es wird dann noch ein systematisches Verfahren entwickelt, um spezielle Eigenschaften der Erweiterungen im zugehörigen Faktorensystem widerzuspiegeln.

Reinhold Baer (Urbana, Illinois/USA).

Kaplansky, Irving: Dual rings. Ann. Math., Princeton, II. s. 49, 689—701 (1948).

A sei ein topologischer Ring. Ist I eine Teilmenge von A , so sei $L(I)$ die Menge aller $x \in A$ mit $xI = 0$, ebenso $R(I)$ die Menge aller x mit $Ix = 0$. A heißt dual, wenn für alle abgeschlossenen Rechtsideale I gilt $I = R(L(I))$, ebenso für alle abgeschlossenen Linksideale $I = L(R(I))$. Besitzt ein dualer Ring A keine nilpotenten Ideale, so ist jedes zweiseitige abgeschlossene Ideal $B \subset A$ wieder ein dualer Ring, und jedes abgeschlossene Rechtsideal in B ist es auch in A . Ein diskreter oder kompakter dualer Ring ohne nilpotente Ideale ist halbeinfach [im Sinn von N. Jacobson, Amer. J. Math. 67, 300—320 (1945)]. Jeder diskrete oder kompakte duale Ring, der die absteigende Kettenbedingung erfüllt, besitzt ein Einselement. Ein Rechtsideal I heißt regulär, wenn ein Element $e \in A$ existiert mit $ex - x \in I$ für alle $x \in A$. Für duale Ringe A , in denen der Durchschnitt der abgeschlossenen maximalen regulären Rechtsideale Null ist, gilt der folgende Struktursatz: In A ist dicht der Ring aller Vektoren $\{a_\alpha\}$ mit nur je endlich vielen $a_\alpha \neq 0$, wobei die a_α je einem einfachen Ring S_α angehören. S_α selbst besitzt einen dichten Teilring von allen (eventuell unendlichen) Matrizen mit nur endlich vielen Elementen $\neq 0$ aus einem Divisionsring D_α . — Jeder diskrete einfache duale Ring ist n -reihiger Matrizenring über einem Divisionsring. Ein primitiver Ring mit minimalen Idealen läßt sich so topologisieren, daß er ein dualer Ring wird. In gewissen einfachen dualen Algebren über dem reellen Zahlkörper werden alle Involutionen $x \rightarrow x^*$ bestimmt, für die aus $xx^* = 0$ stets $x = 0$ folgt. Für die von W. Ambrose [Trans. Amer. math. Soc. 57, 364—386 (1945)] betrachteten eigentlichen H^* -Algebren wird bewiesen, daß sie duale Ringe sind, die Ambroseschen Struktursätze werden neu hergeleitet. Schließlich werden vollstetige Banachalgebren untersucht, d. h. solche, deren sämtliche Elemente x vollstetige Abbildungen $a \rightarrow ax$ und $a \rightarrow xa$ erzeugen. Ist eine solche Algebra halbeinfach, so ist sie transitiv reduzibel im Sinn des Ref. [Math. Ann., Berlin 103, 545—565 (1930)]. Für die über einer kompakten Gruppe G mit Hilfe des Haarschen Maßes gebildeten Banachalgebren C^* und L_p wird bewiesen, daß sie halbeinfache duale Ringe sind mit diskretem Spektrum [im Sinne von I. Segal, Trans. Amer. math. Soc. 61, 65—105 (1947)], in denen jedes abgeschlossene Ideal der Durchschnitt der es umfassenden regulären maximalen Ideale und die Vereinigung der in ihm enthaltenen einfachen Ideale ist.

G. Köthe (Mainz).

Johnson, R. E. and F. Kiokemeister: The endomorphisms of the total operator domain of an infinite module. Trans. Amer. math. Soc. 62, 404—430 (1947).

Es werden die Endomorphismen des Endomorphismenringes Δ eines Vektorraumes \mathcal{E} über dem Schiefkörper P betrachtet, falls \mathcal{E} über P eine abzählbar unendliche Basis ξ_1, ξ_2, \dots hat. Die Elemente von Δ werden ebenso wie die von P als Linksooperatoren von \mathcal{E} geschrieben. $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ mit $\bar{\alpha}\xi_i = \alpha\xi_i$ ist ein Anti-Isomorphismus von P auf einen Schiefkörper $\bar{P} \subset \Delta$. \bar{P} hängt i. a. von der Basiswahl ab. Abzählbar unendlich viele $a_i \in \Delta$ heißen „algebraisch summierbar“, wenn für jedes $\xi \in \mathcal{E}$ nur endlich viele $a_i\xi \neq 0$ sind; dann wird $(\sum a_i)\xi = \sum a_i\xi$ definiert. Bezüglich dieser verallgemeinerten Summation bilden die durch $e_{ij}\xi_k = \delta_{jk}\xi_i$ (mit δ_{jk} als Kronecker-Symbol) definierten $e_{ij} \in \Delta$ eine \bar{P} -Basis

von Δ (Satz 2. 2). Ein Endomorphismus θ von Δ heißt „vollständig“, wenn aus der algebraischen Summierbarkeit der a_i stets auch die der a_i^θ sowie $(\sum a_i)^\theta = \sum a_i^\theta$ folgt. Jeder Endomorphismus von Δ ist vollständig und entweder ein Isomorphismus oder der Nullendomorphismus (Satz 3.4). Jeder Isomorphismus θ von Δ in sich läßt sich durch

$$(\sum_{i,j} \bar{\alpha}_{ij} e_{ij})^\theta = \sum_{r,s} v_r (\sum_{i,j} \bar{\varrho}_{rs}^{\alpha_{ij}} e_{ij}) u_s$$

darstellen, wobei die Indizes r, s eine abzählbare Menge I durchlaufen, $u_k v_j = \delta_{kj} e$ (mit $e = \sum e_{ii}$ als Einselement von Δ) gilt und $\bar{\alpha} \rightarrow \bar{f}_\alpha = \sum_{r,s} \bar{\varrho}_{rs}^\alpha e_{rs}$ ein Isomorphismus von \bar{P} in Δ ist (Satz 4. 2). Umgekehrt liefert jeder solche Ausdruck einen Isomorphismus von Δ in sich, falls bei unendlicher Menge I die u_i algebraisch summierbar sind (Satz 4. 3). Ein Automorphismus θ von Δ läßt sich durch

$$(\sum_{i,j} \bar{\alpha}_{ij} e_{ij})^\theta = u^{-1} (\sum_{i,j} \bar{\varrho}^{\alpha_{ij}} e_{ij}) u$$

darstellen, wobei u ein reguläres Element $\in \Delta$ und $\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\varrho}^\alpha$ ein Automorphismus von \bar{P} ist (Satz 4. 4). Bei einem \bar{P} -Isomorphismus (d. h. $\bar{\alpha}^\theta = \bar{\alpha} e^\theta = e^\theta \bar{\alpha}$) von Δ in sich ist $\bar{f}_\alpha = \bar{\alpha}$, und jeder \bar{P} -Automorphismus ist ein innerer Automorphismus (Satz 5. 2). Der Nullendomorphismus ist der einzige Anti-Endomorphismus von Δ (Satz 6. 1). G. Pickert (Tübingen).

Smiley, M. F.: The radical of an alternative ring. Ann. Math., Princeton, II. s. 49, 702—709 (1948).

A sei ein alternativer Ring. Jeder aus zwei Elementen erzeugte Teilring ist also assoziativ. (a, b, c) bezeichne den Assoziator $a(bc) - (ab)c$ von drei Elementen. In Verallgemeinerung eines Resultates von R. Moufang für Alternativkörper wird für beliebige alternative Ringe bewiesen, daß aus $(a, b, c) = 0$ folgt, daß der aus a, b, c erzeugte Teilring assoziativ ist. Das Element $a + b + ab$ wird als die Quasiumme $a \circ b$ bezeichnet, a heißt rechts quasiregulär, wenn ein $b \in A$ existiert mit $a \circ b = 0$. Ist $a \circ b = 0$, so ist $(a, b, c) = 0$ für jedes $c \in A$. Ist ab rechts quasi-regulär, so auch ba . Nach N. Jacobson [Amer. J. Math. 67, 300—320 (1945)] wird das Rechtsradikal $R_r(A)$ als die Menge aller $a \in A$ definiert, für die jedes Element des durch a erzeugten Rechtsideals rechts quasi-regulär ist. Es wird bewiesen, daß das Rechtsradikal mit dem Linksradikal zusammenfällt und ein zweiseitiges Ideal in A ist, das Radikal $R(A)$ von A . Nach dem Muster von Jacobson ergeben sich weitere Sätze: $R(A)$ enthält kein idempotentes Element $\neq 0$. Es ist $R(A - R(A)) = 0$. Ist I ein nur aus nilpotenten Elementen bestehendes Linksideal, so ist $I \subseteq R(A)$. Ist A regulär im Sinne von von Neumann, so ist $R(A) = 0$. Gelten die von M. Zorn [Ann. Math., Princeton, II. s. 42, 676—686 (1941); dies. Zbl. 25, 302] vorausgesetzten Kettensätze in A , so fällt das hier definierte Radikal mit dem Zornschen zusammen. Ist A kommutativ und $R(A) = 0$, so ist A assoziativ. G. Köthe (Mainz).

Borofsky, S.: Characterization of a field by a single operation. Amer. J. Math. 71, 92—104 (1949).

Die Aufgabe, einen kommutativen Körper durch Axiome bezüglich einer einzigen binären Operation zu charakterisieren, geht auf N. Wiener zurück, der im Jahre 1920 [Trans. Amer. math. Soc. 21, 237—246] zeigte, daß Summe und Produkt im üblichen Sinne sich durch eine Operation $a \nabla b$ ausdrücken lassen, wobei $a \nabla b$ sich formal wie $1 - a/b$ verhält. Da aber ein Körper (wegen der Möglichkeit $b = 0$) gegenüber dieser Operation nicht abgeschlossen ist, hat R. J. Levit [Trans. Amer. math. Soc. 57, 426—440 (1945)] ihre linke Inverse $a \triangle b$ [formal wie $a(1 - b)$] betrachtet und ein System von 5 Axiomen aufgestellt, aus dem er die Wiener'schen Körperaxiome herleiten konnte. — In der vorliegenden Arbeit zeigt Verf., daß die

Operation $a \circ b$ [formal wie $a(b-1)$] einen noch direkteren Zugang gestattet. Aus 6 einfachen Axiomen leitet er durch elementare Schlüsse die üblichen Definitionen und Eigenschaften von Summe und Produkt her. Die vom Verf. aufgestellten Definitionen von Summe und Produkt sind nicht die einzig möglichen. Er zeigt, daß, wenn ein Körper F_0 durch die Operation $a \circ b$ definiert ist und nun mit Hilfe von zwei festen Körper-Elementen $\alpha \neq 0$ und β die folgenden Definitionen aufgestellt werden: Summe: $a + b - \beta$, Produkt: $\alpha(a - \beta)(b - \beta) + \beta$, das so entstehende System F ebenfalls ein Körper ist. Schließlich gilt eine teilweise Umkehrung dieses Sachverhaltes: wenn eine Addition und Multiplikation mit Hilfe von $a \circ b$ so definiert werden, daß das entstehende System F ein Körper ist, und wenn in F die Operation $a \circ b$ eine bilineare, gebrochen rationale Funktion von a und b ist, also $a \circ b = (\lambda_1 ab + \mu_1 a + \nu_1 b + \sigma_1) / (\lambda_2 ab + \mu_2 a + \nu_2 b + \sigma_2)$ mit $\lambda_i, \mu_i, \nu_i, \sigma_i \in F$, dann müssen Summe und Produkt in F_0 in der obigen Form ausdrückbar sein.

K. A. Hirsch (Newcastle-upon-Tyne).

Zahlentheorie:

Mirsky, L.: The additive properties of integers of a certain class. Duke math. J. 15, 513—533 (1948).

Es sei A eine endliche oder unendliche Menge von natürlichen Zahlen mit paarweise teilerfremden Elementen. Eine ganze Zahl heiße A -frei, wenn keiner ihrer Teiler zu A gehört, und es sei $Q(n) = Q(n, A, s)$ für $s \geq 2$ die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von s A -freien Zahlen. Verf. untersucht das Verhalten von $Q(n)$ für $n \rightarrow \infty$ und verallgemeinert damit die Untersuchungen über Darstellungen durch r -freie Zahlen (A = Menge der r -ten Potenzen der Primzahlen, $r \geq 2$), wie sie insbesondere von Evelyn und Linfoot [dies. Zbl. 4, 342] sowie von Estermann und Barham [dies. Zbl. 10, 197] angestellt wurden. Die Methoden sind elementaranalytisch und liefern

$$(1) \quad Q(n) = \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} S(n) + R(n)$$

mit (a durchläuft stets die Elemente von A)

$$S(n) = \prod_{a \nmid n} \frac{(a-1)^s - (-1)^s}{a^s} \prod_{a|n} \frac{(a-1)^s + (-1)^s(a-1)}{a^s},$$

$$R(n) = O(n^{s-1} H(\tfrac{1}{4} \log n)) + O(n^{s-1/2}), \quad H(x) = \sum_{a > x} a^{-1},$$

falls $\sum_a a^{-1}$ konvergiert. Ist diese Konvergenz hinreichend schnell, d. h. gilt für die Anzahl $A(x)$ aller Elemente $\leq x$ von A die Bedingung $A(x) = O(x^\eta)$ mit $0 < \eta < 1$, so verbessert sich das Restglied zu

$$(2) \quad R(n) = O(n^{s-2+\alpha\eta+s}) \text{ mit } \alpha = s/(s-1+\eta).$$

Für den Fall der r -freien Zahlen ($r \geq 2$) geht (1) in die Formel von Evelyn und Linfoot über, wobei die Abschätzung (2) für $s \geq 3$ besser ist als die von Evelyn-Linfoot, dagegen für $s \geq 4$ weniger gut als die von Barham-Estermann (die nur $s \geq 4$ behandelten). Verf. gibt ferner eine Abschätzung für die mittlere Größenordnung von $R(n)$, d. h. von $x^{-1} \sum_{n \leq x} R(n)$ für $x \rightarrow \infty$, und eine asymptotische Formel für $Q(n)$ auch für den Fall, daß $\sum_a a^{-1}$ divergiert. Rohrbach (Mainz).

Behrend, F. A.: Generalization of an inequality of Heilbronn and Rohrbach. Bull. Amer. math. Soc. 54, 681—684 (1948).

Für irgend m natürliche Zahlen a_1, \dots, a_m sei $T(a_1, \dots, a_m)$ die (natürliche) Dichte der Menge aller durch keine der a_μ teilbaren natürlichen Zahlen. Diese Dichte existiert, und man kann ihren Wert in Form einer mehrfachen Summe

ausdrücken. H. Heilbronn (vgl. dies. Zbl. 16, 290) und Ref. bewiesen unabhängig voneinander die Abschätzung $T(a_1, a_2, \dots, a_m) \geq T(a_1) T(a_2) \cdots T(a_m)$. — Verf. verallgemeinert diese Ungleichung zu

$$T(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) \geq T(a_1, \dots, a_m) T(b_1, \dots, b_n).$$

Sie gilt für ganzzahlige $m \geq 0$, $n \geq 0$, falls $T(a_1, \dots, a_m) = 1$ gesetzt wird für $m = 0$. Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion nach $a_1 + \dots + a_m + b_1 + \dots + b_n$. Das Gleichheitszeichen gilt, sofern keins der a_μ und b_ν Vielfaches eines anderen a_ρ oder b_σ ist (solche Vielfachen dürfen gegebenenfalls gestrichen werden), dann und nur dann, wenn $(a_\mu, b_\nu) = 1$ ist ($\mu = 1, 2, \dots, m; \nu = 1, 2, \dots, n$).

Rohrbach (Mainz).

Tchudakoff, N.: On Goldbach-Vinogradov's theorem. Ann. Math., Princeton, II. s. 48, 515—545 (1947).

Winogradoffs Beweis von 1937 für den Satz, daß sich jede hinreichend große ungerade Zahl als Summe von drei ungeraden Primzahlen darstellen läßt, beruhte auf einer neuen Abschätzung der Weylschen Summen (vgl. dies. Zbl. 16, 291). 1945/46 hat U. V. Linnik einen neuen Beweis für diesen Satz gegeben, der — nach Mitteilung des Verf.; Literatur dem Ref. nicht zugänglich — ohne Weylsche Summen (und auch ohne die von Brun und von Schnirelmann eingeführten Hilfsmittel) allein mit der klassischen Methode der Dirichletschen L -Reihen arbeitet [C. r. Acad. Sci. URSS, II. s. 49, 3—7 (1945); Mat. Sbornik, II. s. 19, 3—8 (1946)]. Die Durchführung des Beweises auf diesem Wege ohne unbewiesene Annahmen über die L -Reihen gelang Linnik auf Grund seiner tiefgelegenen Ergebnisse über die Nullstellen der L -Reihen im kritischen Streifen [z. B. Mat. Sbornik, II. s. 15, 3—12, 139—178, 347—368 (1944); Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 10, 35—46 (1946)]. — Verf. gibt eine ausführliche Beweisaneinanderordnung, die sich an die Linniksche Methode anlehnt, aber — nach seinen Angaben — bessere Abschätzungen für die Restglieder der vorkommenden asymptotischen Formeln liefert. Die drei Hauptpunkte des Beweises sind:

1. Eine Modifikation der approximativen Funktionalgleichung für $L(s, \chi)$, nämlich men deuten 0):

$$L(s, \chi) = \sum_{1 \leq m \leq \alpha k} \chi(m) m^{-s} + H(s, \chi) \sum_{1 \leq m \leq \beta} \bar{\chi}(m) m^{s-1} + R(s, \chi),$$

wo $\gamma > 0$, $t = 2\pi\alpha\beta \geq 2\pi\gamma^2$, $0 < w \leq 1$, $0 \leq \sigma \leq 1$, $\gamma \leq \alpha \leq t(2\pi\gamma)^{-1}$, $\chi(n)$ ein primitiver Charakter mod k mit k als kleinstem Absolutwert von $\chi(n)$ (Hauptcharakter für $k = 1$) und

$$H(s, \chi) = i \chi(-1) k^{-s} (2\pi)^{s-1} e^{-\frac{1}{2}\pi s i} \Gamma(1-s) \sum_{a=1}^k \chi(a) \exp\left(2\pi i \frac{a}{k}\right),$$

$$R(s, \chi) = O\left\{(1+\gamma^{-1})^2 (1+\gamma^{-2})^2 k^{1-\sigma} (\alpha^{-\sigma} + \alpha^{1-\sigma} t^{\frac{1}{2}} + \alpha^{-1-\sigma} t^{\frac{1}{2}})\right\}.$$

2. Eine Verschärfung (mittels der Carlson-Landau-Methode) der Abschätzung für die Anzahl der Nullstellen von $L(s, \chi)$ im kritischen Streifen ($\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$, $\nu = \sigma - \frac{1}{2}$):

$$N(\sigma, T) = O\left\{k^{2\nu} T^{(1-2\nu)/(1-\nu)} (\log T)^{7,5} + k^2 (\log k + 1)\right\}$$

für jedes $k \geq 1$ und $T \geq 1$. — 3. Eine Verschärfung des „großen Hilfssatzes“ (vgl. Landau, Zahlentheorie I, Leipzig 1927, Satz 248): Es sei $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$, $\eta = \log 1/r$, $M = 1/\eta$ und $A > 0$ beliebig, $A_1 = 4(A + 9,5)$, $\tau = \max(1, (\log M)^{A_1})$ und C_r der Kreis $w = r e^{i\alpha}$, $-\pi < \alpha \leq \pi$. Ist dann $C_{r\varrho}$ der Bogen der Fareyzerschnidung der Ordnung τ von C_r , der den Punkt

$$\varrho = \exp(2\pi i l/k) \text{ enthält } [(l, k) = 1], \text{ ferner } f(w) = \sum_{p \geq 2} \log p w^p, \psi_\varrho(w) = \frac{\mu(k)}{h(1-w\varrho^{-1})},$$

so gilt in jedem Punkt von $C_{r\varrho}$

$$f(w) - \psi_\varrho(w) = O\{(M \log M)^{-A}\}.$$

Dieser Hilfssatz wird also gleich für die Bogen $C_{r\varrho}$ formuliert. —

Der Beweis von 3. benutzt neben 1. und 2. und mehreren, z. T. auch für 1. und 2. erforderlichen, Hilfssätzen noch Siegels Satz von 1936 über die Nullstellen Dirichletscher L -Reihen mit reellen Charakteren. Der eigentliche Beweis des Winogradoffschen Satzes verläuft dann auf dem klassischen Wege [vgl. Landau, Zahlentheorie I, Teil V, Kap. 6].

Rohrbach (Mainz).

Fine, J. Nathan: Some new results on partitions. Proc. nat. Acad. Sci. USA **34**, 616—618 (1948).

Voranzeige von Sätzen über Zerlegungen einer natürlichen Zahl n in Summanden; die Begründung soll in mehreren Arbeiten anderweitig erfolgen. Es handelt sich um eine Reihe von Relationen zwischen den Anzahlen von Zerlegungen verschiedener Art.

Rohrbach (Mainz).

Turán, Paul: On certain exponential sums. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **51**, 343—352 (1948).

Es wird ein Zusammenhang zwischen einer Abschätzung von Exponentialsummen und der „quasi-Riemannschen Vermutung“, die besagt, daß ein ϑ mit $\frac{1}{2} \leq \vartheta < 1$ existiert, derart, daß die Riemannsche ζ -Funktion in der Halbebene $\sigma > \vartheta$ höchstens endlich viele Wurzeln besitzt, hergestellt durch den Satz: Notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der quasi-Riemannschen Vermutung ist die Existenz von $\alpha \geq 2$, $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$, $\frac{1}{4} \leq \gamma \leq 2$ mit

$$\left| \sum_{N' \leq p \leq N''} e^{it_0 \log^{\gamma} p} \right| < c_1 \frac{N e^{40(\log \log N)^2}}{|t_0|^{\beta}}$$

und der Einschränkung $c_2 \leq |t_0|^{\alpha} \leq N/2 \leq N' < N'' \leq N$, wobei p die Primzahlen durchlaufe. Neben diesem Satz wäre ein ähnliches, kürzlich erschienenes Resultat des Verf. zu nennen [Mat. Sbornik, II. s. 2, 197—262 (1947)], wo die quasi-Riemannsche Vermutung zu Exponentialsummen mit $\gamma = 1$ in Beziehung gesetzt wird. — Der Beweis verwendet Ideen von G. Hoheisel [S.-B. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl. 1930, 580—588] und U. V. Linnik [Mat. Sbornik, II. s. 19, 3—8 (1946)].

Th. Schneider (Göttingen).

Bruijn, N. G. de and P. Erdős: Sequences of points on a circle. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **51**, 46—49 (1949).

Verf. betrachten Folgen $\{a\}$ von Punkten a_1, a_2, a_3, \dots auf einem Kreis vom Radius $1/2\pi$, also Zahlen mod 1. Die Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n bestimmen auf dem Kreis n Intervalle der Gesamtlänge 1. Es sei $M_n^1(a)$ bzw. $m_n^1(a)$ die größte bzw. kleinste Länge der n Intervalle, allgemeiner sei $M_n^r(a)$ bzw. $m_n^r(a)$ die größte bzw. kleinste Summe von r aufeinander folgenden Intervallen. Es gelten dann, wie Verf. beweisen, die Abschätzungen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n M_n^r(a) \geq 1/\log(1+1/r), \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} n m_n^r(a) \leq \frac{r}{R+1} / \log(1+1/r),$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} M_n^r(a)/m_n^r(a) \geq 1+1/r.$$

Heinhold (München).

Hlawka, Edmund: Eine asymptotische Formel für Potenzsummen komplexer Linearformen. Mh. Math., Wien **52**, 248—254 (1948).

$L_1(x; y)$ und $L_2(x; y)$ seien zwei homogene Linearformen mit komplexen Koeffizienten, deren Matrix A eine Determinante vom Absolutbetrag 1 besitzt. Ferner sei für $\alpha > 0$ $M(A, \alpha) = \min(|L_1|^{\alpha} + |L_2|^{\alpha})$ für alle ganzen Zahlen x, y des Körpers $k(i)$, die nicht beide verschwinden und $M(\alpha) = \sup_A M(A, \alpha)$. Es gilt dann für $0 < \alpha < 1$, wie Verf. unter Benutzung Perronscher Ergebnisse beweist, $[M(\alpha)]^{1/\alpha} = \frac{2^{1/\alpha}}{\sqrt[4]{3}} (1 + \alpha g(\alpha))$, wobei $g(\alpha)$ zwischen positiven Schranken liegt:

$$0 < C_1 \leq g(\alpha) < C_2. \quad \text{Man kann } C_1 = \frac{1}{32} \ln^2 2 \sqrt[4]{3} \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{1}{8} e^{(s-1)^2}$$

mit $s = \frac{4\sqrt[4]{3} + 3\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2}}$ wählen.

Heinhold (München).

Mullender, P.: Homogeneous approximations. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **50**, 173—193 (1947).

Es wird gefragt, für welche Konstanten A und B die Ungleichungen

$$(1) |L_1 \cdots L_n| \leq \frac{|A|}{A} \quad \text{und} \quad (2) |L_1|^\sigma + \cdots + |L_n|^\sigma \leq \frac{|A|^{\sigma/n}}{B} \quad \text{mit} \quad \sigma > 0,$$

$$\text{wobei} \quad L_k = a_{k1}z_1 + \cdots + a_{kn}z_n \quad (k = 1, \dots, n), \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

bedeuten, bei beliebigen a_{ik} unendlich viele ganzzahlige Lösungen z_k ($k = 1, \dots, n$) oder im Falle der Ungleichung (2) nur eine ganzzahlige nichttriviale Lösung haben. Diese Probleme werden behandelt, indem erstens nach Konstanten A und B gesucht wird, die obigen Bedingungen genügen („erlaubte Werte“ für A und B) und zweitens nach Konstanten A und B , für die die genannten Bedingungen nicht erfüllt sind (nicht-erlaubte Werte). — Der erste Weg ist in der Dissertation des Verf. [Toepassing van de meetkunde der getallen op ongelijkheden in $K(1)$ en $K(i/\sqrt{m})$, Diss., Amsterdam (1945)], deren Resultate hier noch einmal zusammengestellt sind, eingeschlagen. Es sind dabei diesbezügliche Ergebnisse von Minkowski, Blichfeldt, Koksma und Meulenbeld, Remak und van der Corput und Schaake verallgemeinert bzw. vom Körper der rationalen Zahlen auf den Körper $K(i/\sqrt{m})$ ausgedehnt worden. — Der zweite Weg wird in einem Spezialfall der Ungleichung (1) und $n = 3$ beschritten, und zwar wird gezeigt: Ist $X = \max(|x_1|, \dots, |x_p|) \geq 1$ und $|\alpha_{j1}x_1 + \alpha_{jp}x_p - y_j| < 1/CX^{p/q}$ ($j = 1, \dots, q$) und ist $C_{p,q}$ die obere Grenze erlaubter Werte (in Analogie zur Terminologie bei A und B), ist ferner C ein nicht-erlaubter Wert von A in Ungleichung (1) mit $n = 3$, so folgt $C_{2,1} \leq C$. Ein analoges Resultat gilt in $K(i/\sqrt{m})$. Der Beweis ist elementar.
Th. Schneider (Göttingen).

Analysis.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Rios, Sixto: Einführung in die Theorie der Fourierreihen. Rev. Acad. Ci. exact. fisic. natur. Madrid 42, 9—36 (1948) [Spanisch].

L'A., en continuant l'exposition élémentaire des séries de Fourier [ce Zbl. 30, 28] traite dans la 2^{me} Partie des extensions aux développements en séries de fonctions orthogonales et normales des fonctions de carré sommable. *Sandro Faedo* (Rome).

Alaci, V.: Sur une intégrale définie nécessaire dans l'étude de séries trigonométriques. Bull. Sci. Techn. Polytechn. Timișoara 13, 121—127 (1948).

L'A. donne une méthode très simple pour calculer l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin^p t}{t^q} dt$ où p et q sont des nombres entiers avec $q \leq p$. *Sandro Faedo* (Rome).

Turán, Paul: On the strong summability of Fourier series. J. Indian math. Soc., II. s. 12, 8—12 (1948).

Let $f(x) \in L^p$ ($p > 1$) in the interval $(0, 2\pi)$, and

$$f(x) \sim \sum_{v=0}^{\infty} (a_v \cos vx + b_v \sin vx), \quad S_n(x, f) = \sum_{v=0}^n (a_v \cos vx + b_v \sin vx).$$

It is known that if x_0 is a continuity-point of $f(x)$, and k an arbitrary large positive number, then is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=0}^n |S_v(x_0, f) - f(x_0)|^k = 0.$$

The A. proves that the constant k cannot generally be replaced by a $k = k(n)$ which tends to infinity. *Sandro Faedo* (Rome).

Schmetterer, Leopold: Zum Konvergenzverhalten gewisser trigonometrischer Reihen. *Mh. Math., Wien* **52**, 162—178 (1948).

Verf. betrachtet das Konvergenzverhalten der Reihe (1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ unter den Bedingungen $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, $|a_{k+1}| \leq |a_k|$. Wenn (1) für $x = 0$ absolut konvergiert [oder an einer beliebigen festen Stelle], ist es trivial, daß (1) im ganzen Intervall $0 \leq x < 2\pi$ absolut konvergent ist. Verf. beweist: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sei divergent, und in (1) folgen abwechselnd auf p positive stets q negative Koeffizienten ($p, q > 0$); dann gilt: 1. In allen Stellen $0 \leq x < 2\pi$, die nicht von der Form $x = \frac{2k\pi}{p+q}$ [$k = 0, 1, \dots, (p+q)$] sind, konvergiert die Reihe (1) [und zwar gleichmäßig in allen abgeschlossenen Intervallen, welche keine Punkte $x = \frac{2k\pi}{p+q}$ enthalten]. 2. In $x = 0$ konvergiert (1) für $p = q$, divergiert für $p \neq q$. 3. In den ausgeschlossenen Punkten $x = \frac{2k\pi}{p+q}$ [$k = 1, 2, \dots, (p+q-1)$] ist die Reihe (1) divergent, wenn nicht zwei vom Verf. bestimmte Umstände eintreten. Verf. verallgemeinert diesen Satz, indem er eine Reihe (1) betrachtet, in der auf p_1 positive q_1 negative, dann auf p_2 positive q_2 negative, ..., schließlich auf p_i positive q_i negative Koeffizienten a folgen, und dies sich wiederholt (i bleibt fest). Verf. gibt einige Anwendungen und betrachtet auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$.

Sandro Faedo (Rom).

Karamata, J.: Sur l'approximation de e^x par des fonctions rationnelles. *Vesnik Društva Mat. Fis. Srbije* **1**, 7—18 u. russ. u. franz. Zusammenfassg. 19 (1949) [Serbisch].

Par des considérations élémentaires l'auteur démontre les inégalités précises: Désignons par $E_n(x)$ les polynômes

$$E_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{\nu=0}^n (2n-\nu)! \binom{n}{\nu} x^\nu, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

et soit x_n le plus petit zéro du polynôme $E_n(-x)$. Alors on a

$$\frac{E_{2k}(x)}{E_{2k}(-x)} \leq e^x \leq \frac{E_{2k+1}(x)}{E_{2k+1}(-x)}, \quad 0 \leq x < x_n \quad (n = 2k+1).$$

L'auteur énonce, sans toutefois donner des démonstrations, les propriétés suivantes des polynômes $E_n(x)$: Ils ne possèdent aucun zéro réel lorsque n est pair et pour n impair ils n'ont qu'un zéro réel négatif $-x_n$, dont la valeur asymptotique est donnée par $x_n \sim n/\sqrt{\eta^2 - 4} \approx 1,325n$, $n \rightarrow \infty$, η étant l'unique solution réelle de l'équation $\frac{1+x/2}{1-x/2} = -e^x$. La valeur asymptotique de $E_n(x)$ est donnée par $E_n(x) \sim \frac{(2n)!}{n!} e^{\frac{x}{2}}$, $n \rightarrow \infty$, pour chaque x fini.

N. Obrechhoff (Sofia).

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Pollard, H.: Representation of an analytic function by a Laguerre series. *Ann. Math., Princeton*, II. s. **48**, 358—365 (1947).

E. Hille [Trans. Amer. math. Soc. **47**, 80—94 (1940); dies. Zbl. **22**, 365] hat die kennzeichnende Bedingung dafür angegeben, daß eine Funktion $f(z)$ durch eine in einem Streifen konvergente Reihe nach Hermite'schen Polynomen (H. P.) dargestellt wird. Verf. löst hier dieselbe Aufgabe bei der Reihe L nach Laguerre'schen Polynomen (L. P.) L_n . Er gibt der Gestalt $L = \sum a_n L_n(z^2)$ von L den Vorzug vor $\Lambda = \sum b_n L_n(z)$, weil der Gebrauch von z^2 statt $z = x + iy$ das parabolische Konvergenzgebiet von Λ in den handlicheren Streifen überführt und die $L_n(z^2)$ mit

den H. P. bequemer zusammenhängen. Verf. erzielt folgendes Ergebnis: Die kennzeichnenden Bedingungen der Zugehörigkeit einer im Streifen $|y| < \tau$ konvergenten Reihe L zu einer Funktion $f(z)$ bestehen darin, daß $f(z)$ dort analytisch und gerade ist und jedem β , $0 \leq \beta < \tau$ eine positive Zahl $B(\beta)$ entspricht, mit der $|f(z)| < B \exp [x^2/2 - |x|(\beta^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}]$ ausfällt, wenn $-\infty < x < \infty$, $|y| \leq \beta$. Den Beweis der Notwendigkeit führt Verf. mit ähnlichen Mitteln wie Hille a. a. O. Beim Nachweise des Hinreichens stützt er sich auf zwei Hilfssätze. Der erste stellt die Beziehung zwischen den L. P. 0-ter und $\frac{1}{2}$ -ter Ordnung durch die Formel her

$$L_n(x) e^{-x} = \pi^{-\frac{1}{2}} \int_x^\infty e^{-u} L_n^{\frac{1}{2}}(u) (u-x)^{-\frac{1}{2}} du, \quad x > 0.$$

Der zweite besagt, daß, wenn eine Funktion $f(z)$ den Annahmen obigen Hauptsatzes genügt, auch die Funktion

$$g(z) = z \int_0^1 u f(zu) (1-u)^{-\frac{1}{2}} du$$

sie befriedigt.

L. Koschmieder (Aleppo).

Reed, I. S.: Note on a minimum value of the gamma function. Rev. Ci., Lima 50, 151—154 (1948).

In der Note wird zur Berechnung des Minimums der Gammafunktion $\Gamma(z)$ mit Hilfe der Lagrangeschen Formel für die Umkehrung von Potenzreihen [vgl. E. T. Copson, Theory of functions of a complex variable, Oxford 1935, S. 124—125; dies. Zbl. 12, 169] ein einfacher Reihenausdruck angegeben. $\Gamma'(z)$ hat ihr Minimum für

$$z_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\Psi(1))^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{\Phi(z)\}^n \right]_{z=1},$$

wo der reziproke Wert von $\Phi(z)$ durch $1/\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+z)}$ gegeben ist

Gran Olsson (Trondheim).

Hillman, Abraham and Herbert E. Salzer: The inverse functions of $z = w^{-1} \tanh w$ and $z = w^{-1} \coth w$. J. Math. Physics, Massachusetts 27, 202—209 (1948).

Es werden die bei gewissen Lösungen der Wellengleichung auftretenden Umkehrfunktionen $w_1(z)$ und $w_2(z)$ zu den Funktionen $z = F_1(w) = w^{-1} \tanh w$, $z = F_2(w) = w^{-1} \coth w$ untersucht. Die unendlich vieldeutigen Umkehrfunktionen besitzen keine Pole und keine isolierten wesentlich singulären Stellen, aber unendlich viele Verzweigungspunkte, von denen (bei Numerierung nach der Entfernung vom Nullpunkt) die ersten numerisch angegeben und asymptotische Formeln für die weiteren angegeben werden. Längs eines Halbstrahls $z = r e^{i\Phi}$ mit $\Phi = \text{const}$, $-\pi/2 < \Phi < +\pi/2$ kann man die Werte von $w_1(z)$ stetig so festlegen, daß $\lim_{r \rightarrow \infty} (w_1(z) - 1/z) = 0$. Mit Hilfe der Differentialgleichung

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{w}{w_1^2 + t - i^2} \quad (\text{es ist } t = 1/z \text{ gesetzt})$$

werden Potenzreihenentwicklungen

$$w_1(z) = i \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1/z)^n, \quad w_1^2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (1/z)^n, \quad w_1(z) = i \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* z^n$$

aufgestellt und die Werte a_n , b_n , a_n^* für einige Zweige der Funktion numerisch angegeben, desgl. für die $w_2(z)$. *Collatz (Hannover).*

Funktionentheorie:

Ankeny, N. C.: One more proof of the fundamental theorem of algebra. Amer. math. Monthly 54, 464 (1947).

Verf. folgert den Fundamentalsatz der Algebra unmittelbar aus dem Cauchy-

schen Integralsatz: Es sei $f(z)$ ein Polynom vom Grade ≥ 2 , $f(z)$ das Polynom mit den konjugiert komplexen Koeffizienten. Wäre $f(z)$ frei von Nullstellen, so auch das reelle Polynom $g(z) = f(z)\overline{f(z)}$ vom Grade ≥ 4 . Mithin wäre $1/g(z)$ in der ganzen Ebene regulär, und man dürfte den Cauchyschen Integralsatz auf jeden Halbkreis über der reellen Achse um den Nullpunkt anwenden. Läßt man den Radius gegen Unendlich gehen, so folgt $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{g(x)} = 0$, wo der Integrand eine reelle, durchweg positive Funktion sein müßte. Widerspruch. Pietsch (Berlin).

Kneser, Helmuth: Über den Beweis des Cauchyschen Integralsatzes bei streckbarer Randkurve. Arch. Math., Oberwolfach **1**, 318—321 (1949).

Es handelt sich um die folgende Fassung des Cauchyschen Integralsatzes: Ist \mathfrak{G} ein beschränktes Gebiet in der z -Ebene und sein Rand eine einfach geschlossene Kurve \mathfrak{k} der endlichen Länge l , ist ferner $f(z)$ in \mathfrak{G} analytisch und auf $\mathfrak{G} + \mathfrak{k}$ stetig erklärt, so gilt $\int_{\mathfrak{k}} f(z) dz = 0$. — Ein einfacher und elementarer Beweis, der indessen noch den vollen Jordanschen Kurvensatz benützt, stammt von L. H. Loomis [Bull. Amer. math. Soc. **50**, 831—833 (1944)]. Verf. gibt hier unter Beibehaltung des Grundgedankens eine Modifikation, die mit dem Jordanschen Kurvensatz für geschlossene Polygone auskommt. — Der Beweis beruht auf polygonaler Approximation der Randkurve \mathfrak{k} von innen her: Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Teilg. \mathfrak{G} von \mathfrak{G} , dessen Rand ein einfach geschlossenes, ebenfalls auf \mathfrak{G} gelegenes Polygon \mathfrak{p} ist, und auf \mathfrak{p} und \mathfrak{k} zyklisch angeordnete Punkte P_1, \dots, P_n bzw. Q_1, \dots, Q_n , so daß 1. jede Strecke $\overline{P_\nu Q_\nu}$ mit \mathfrak{p} nur den Punkt P_ν und mit \mathfrak{k} nur den Punkt Q_ν gemeinsam hat ($\nu = 1, \dots, n$), 2. je zwei derartige Strecken höchstens hinsichtlich ihrer auf \mathfrak{k} gelegenen Endpunkte koinzidieren, 3. für jedes ν die aus dem Teilbogen $P_\nu P_{\nu+1}$ von \mathfrak{p} , den Strecken $\overline{P_\nu Q_\nu}$, $\overline{P_{\nu+1} Q_{\nu+1}}$ und dem Teilbogen $Q_\nu Q_{\nu+1}$ von \mathfrak{k} bestehende Kurve l_ν einen Durchmesser $\leq \varepsilon$ hat ($P_{n+1} = P_1, Q_{n+1} = Q_1$), 4. die Summe der Längen aller dieser Kurven $\leq Cl$ ist, wo C eine feste, angebbare Schranke ist ($C = 37$). — Wie schon Loomis i. c. b. merkt hat, läßt sich die Methode auch beim Beweise des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene verwerten. Pietsch.

Deuring, Max: Eine Bemerkung zum Cauchyschen Integralsatz. Arch. Math., Oberwolfach **1**, 321—322 (1949).

Verf. geht auf die ursprüngliche Cauchysche Fassung des Integralsatzes zurück: $f(z)$ sei in dem Gebiet \mathfrak{G} regulär. Es ist $\int_{\mathfrak{k}} f(z) dz = 0$, wenn \mathfrak{k} ein in \mathfrak{G} verlaufender geschlossener rektifizierbarer Weg ist, der bezüglich jedes nicht zu \mathfrak{G} gehörenden Punktes die Umlaufszahl 0 hat. — In dieser Form läßt sich der Satz sehr einfach beweisen, ohne vom Jordanschen Kurvensatz Gebrauch zu machen. — Man erkennt unmittelbar, daß man den Beweis auf den Fall reduzieren kann, daß \mathfrak{k} ein geschlossenes Polygon \mathfrak{p} ist. Man wähle nun eine Triangulation der Ebene, so daß \mathfrak{p} aus Kanten der Triangulation besteht. Es seien D_ν die Dreiecke der Triangulation ($\nu = 1, 2, \dots$), $\text{Rd}(D_\nu)$ der positiv orientierte Rand von D_ν und $U(\mathfrak{p}, D_\nu)$ die für alle inneren Punkte von D_ν konstante Umlaufszahl von \mathfrak{p} . Dann gilt

$$\mathfrak{p} = \sum_{\nu} U(\mathfrak{p}, D_\nu) \text{Rd}(D_\nu),$$

und zu dieser Summe liefert nach Vor. jedes D_ν den Beitrag 0, das nicht ganz aus Punkten von \mathfrak{G} besteht. Die übrigen können höchstens in endlicher Anzahl auftreten und liefern Beiträge zum Kurvenintegral, deren Verschwinden man z. B. nach der klassischen Goursatschen Methode beweisen kann. — Mit dieser Beobachtungsweise lassen sich auch andere Fassungen des Integralsatzes und die Cauchyschen Integralformeln durchsichtiger begründen. Pietsch (Berlin).

Goodman, A. W.: On some determinants related to p -valent functions. Trans. Amer. math. Soc. **63**, 175—192 (1948).

Für die im Einheitskreis p -wertige Funktion $f(z) = \sum_1^{\infty} b_n z^n$ gilt nach Bier-nacki $|b_n| \leq C(p) n^{2p-1} \max \{|b_v|, v \leq p\}$. Verf. betrachtet rationale Funktionen p -ten Grades der schlichten Extremalfunktion $z/(1-z)^2$ und bekommt im wesentlichen eine Minorante von $C(p)$, die allerdings überdies von den einzelnen $|b_v|$ ($v \leq p$) abhängt. Gäbe diese Minorante die exakte obere Schranke von $|b_n|$ (welche Vermutung sich für $p = 1$ auf die Bieberbachsche Vermutung $b_n = nb_1$ über schlichte Funktionen reduziert), so würde sich eine trigonometrische Determinantengleichung einstellen, die Verf. jedoch auch direkt beweist. *G. af Hällström (Åbo).*

Nevanlinna, Rolf: Über die Neumannsche Methode zur Konstruktion von Abel-schen Integralen. Comment. math. Helvetici **22**, 302—316 (1949).

Sei F eine Riemannsche Fläche, deren Rand das harmonische Maß Null hat, α und β zwei nebeneinander verlaufende analytische Rückkehrschnitte; α (bzw. β) zerlege F in einen β (α) enthaltenden Teil A (B) und einen Rest A' . Die Funktionen $a(z)$ und $b(z)$ seien in $A \cap B$ harmonisch und eindeutig. Gesucht wird eine Funktion $f(z)$ so, daß $f - a$ in A und $f - b$ in B als eindeutige beschränkte harmonische Funktionen festsetzbar sind. Nach Carl Neumann ist diese Aufgabe bei geschlossenen Flächen dann und nur dann lösbar, wenn $a(z) - b(z)$ eine gewisse Integralbedingung erfüllt. Dasselbe Ergebnis wird für die Flächen F mit dem Neumannschen alternierenden Verfahren abgeleitet. Ist $\omega_\alpha(x, z)$ das harmonische Maß des von einem festen Anfangspunkt bis zum Punkt x erstreckten Teilbogens von α bezüglich des in A gelegenen Punktes z und wird ω_β entsprechend erklärt, so bildet man

$$\varphi(y, x) = \int_{\beta} \omega_\alpha(y, z) d\omega_\beta(z, x);$$

dann ist

$$(1) \quad u(x) = \int_{\alpha} u(y) d\varphi(y, x) + u_0(x)$$

die maßgebende Integralgleichung; dabei ist u_0 durch $a - b$ bestimmt. Sie erfüllt die für die Lösbarkeit notwendige Bedingung; (1) wird durch Iteration gelöst. Dasselbe Verfahren gibt bei automorphen Funktionen, deren Grundbereich Nullrand und das Geschlecht Null hat, eine automorphe Funktion mit einem einfachen Pol an einer beliebigen vorgeschriebenen Stelle des Grundbereichs. *H. Kneser.*

Rothstein, Wolfgang: Die Existenz irreduzibler analytischer Flächen, welche sich über den Rand eines gegebenen Regularitätsbereiches nicht fortsetzen lassen. Arch. Math., Oberwolfach **1**, 205—211 (1949).

Es sei \mathfrak{B} ein schlichtes beschränktes Gebiet im Raume von n komplexen Veränderlichen und $g(z_1, \dots, z_n)$ eine in \mathfrak{B} reguläre, eindeutige, nichtkonstante Funktion, die in \mathfrak{B} den Wert α annehmen möge. α heißt Ausnahmewert von $g(z_1, \dots, z_n)$ bezüglich \mathfrak{B} , falls wenigstens eine irreduzible Komponente der analytischen Flächen $g - \alpha = 0$ aus dem Innern von \mathfrak{B} über den Rand von \mathfrak{B} hinaus fortgesetzt werden kann. Verf. beweist: Sind sämtliche Punkte eines Kreises K der α -Ebene Ausnahmewerte, so läßt sich $g(z_1, \dots, z_n)$ über den Rand von \mathfrak{B} hinaus fortsetzen. Die Aussage bleibt richtig, wenn an die Stelle von K irgendeine abgeschlossene Menge der α -Ebene von positiver Kapazität tritt; ferner darf die Voraussetzung der Schlichtheit und Beschränktheit von \mathfrak{B} ersetzt werden durch die Forderung, daß \mathfrak{B} Teilgebiet eines \mathfrak{B} ganz umfassenden Gebietes \mathfrak{B}^* über dem R_{2n} ist. — Ist \mathfrak{B} Regularitätsbereich der Funktion $f(z_1, \dots, z_n)$, so nimmt f in \mathfrak{B} Werte α_1 an, die nicht Ausnahmewerte von f bezüglich \mathfrak{B} sind. Jede irreduzible Komponente von $f - \alpha_1 = 0$ stellt dann eine in \mathfrak{B} sich algebraisch verhaltende analytische Fläche dar, die nirgends über den Rand von \mathfrak{B} hinaus fortsetzbar ist. *Stein (Münster i. W.).*

Lelong, Pierre: Sur les fonctions indéfiniment dérivables de plusieurs variables dont les Laplaciens successifs ont des signes alternés. *Duke math. J.* **14**, 143—149 (1947).

Ein Satz von D. V. Widder [*Proc. nat. Acad. Sci. USA* **26**, 657—659 (1940)] wird auf Funktionen mehrerer Veränderlichen übertragen: $f(x_1, \dots, x_p) \equiv f(x)$ sei eine beliebig oft differenzierbare Funktion in einem p -dimensionalen Gebiet D des \mathbb{R}^p . Δ sei der p -dimensionale Laplaceoperator und $\Delta^{(n)}$ der n -mal iterierte Δ -Operator. Gilt dann $(-1)^n \Delta^{(n)} f(x) \geq 0$ in D für alle $n = 1, 2, 3, \dots$, so ist $f(x)$ in D regulär. Ferner ist $f(x)$ als Funktion der p komplexen Veränderlichen $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \dots, p$, regulär in einem $2p$ -dimensionalen Gebiet $H(D)$, welches nur von D abhängt. Ist z. B. D die Hyperkugel $\sum x_k^2 < R^2$, so enthält $H(D)$ den Kreisbereich $\sqrt{\sum x_k^2} + \sqrt{\sum y_k^2} < R$. *F. Sommer (Münster/Westf.).*

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Hille, Einar: Non-oscillation theorems. *Trans. Amer. math. Soc.* **64**, 234—252 (1948).

Die Differentialgleichung $y'' = F(x)y$, wo $F(x)$ eine gegebene reelle, für $x > 0$ definierte, Lebesgue-integrierbare Funktion ist, wird „nicht-oszillatorisch in (a, ∞) “ genannt ($a \geq 0$), wenn keine ihrer Lösungen in diesem Intervall das Vorzeichen mehr als einmal wechseln kann. Hierfür einfache und möglichst erschöpfende Kriterien aufzustellen, ist das Ziel der Arbeit. Die Differentialgleichung „hat die Eigenschaft I bzw. I*“, wenn eine Lösung $y_1(x)$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} y_1(x) = 1$ bzw. eine Lösung $y_2(x)$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} (y_2(x) - x) = 0$ existiert. Dann gilt: Hat die Differentialgleichung die Eigenschaft I, so ist sie für große x nicht-oszillatorisch. Hat überdies $F(x)$ in (c, ∞) mit $c > 0$ festes Vorzeichen, so ist jede Lösung $y(x)$ für große x monoton, $\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x)$ existiert und ist endlich, und $y(x)$ ist für große x konvex bzw. konkav zur x -Achse, je nachdem $F(x) \geq 0$ oder $F(x) \leq 0$. Wenn $F(x)$ für große x festes Vorzeichen hat, so hat die Differentialgleichung genau dann die Eigenschaft I, wenn $x F(x)$ über das Intervall $(1, \infty)$ L -integrierbar ist. Im letztgenannten Falle besteht eine eindeutige Zuordnung der Lösungen der Differentialgleichung zu den nicht-senkrechten Geraden der x - y -Ebene, derart, daß die Gerade die Asymptote der Lösungskurve ist. — Durch $y(x) = \exp\left(\int_a^x v(t) dt\right)$ kann man der Differentialgleichung eine nicht-lineare Integralgleichung zuordnen

$$v(x) = \int_x^\infty v^2(t) dt + \int_x^\infty f(t) dt \quad \text{mit } f(x) = -F(x).$$

Die Differentialgleichung ist genau dann nicht-oszillatorisch, wenn diese Integralgleichung für genügend große x eine Lösung besitzt. Setzt man $g(x) = x \int_x^\infty f(t) dt$ und $g^* = \overline{\lim} g(x)$, $g_* = \underline{\lim} g(x)$, so ist für eine nicht-oszillatorische Differentialgleichung $g_* \leq \frac{1}{4}$ und $g^* \leq 1$; beide Schranken können nicht verbessert werden. Ist $g(x) \leq \frac{1}{4}$ für $x \geq a$, so ist die Differentialgleichung nicht-oszillatorisch. Es sei $\overline{\lim} x^2 f(x) = \gamma^*$, $\underline{\lim} x^2 f(x) = \gamma_*$, dann sind die Lösungen der Differentialgleichung für große x nicht-oszillatorisch, wenn $\gamma^* < \frac{1}{4}$, und oszillatorisch, wenn $\gamma_* > \frac{1}{4}$. Allgemein gilt das weitreichende Kriterium: Es wird gesetzt:

$$\log_1 x = \log x, \log_p x = \log \log_{p-1} x, L_0(x) = x, L_p(x) = L_{p-1}(x) \log_p x, \\ S_p(x) = \sum_{k=0}^p [L_k(x)]^{-2}, \lim_{\inf}^{\sup} [L_p(x)]^2 \left\{ f(x) - \frac{1}{4} S_{p-1}(x) \right\} = \frac{\gamma_p^*}{\gamma_{p*}}.$$

Dann sind die Lösungen der Differentialgleichung nicht-oszillatorisch für große x , wenn $\gamma_p^* < \frac{1}{4}$, oszillatorisch, wenn $\gamma_{p*} > \frac{1}{4}$, und kein Schluß kann gezogen werden, wenn $\gamma_p^* = \frac{1}{4}$ oder $\gamma_{p*} = \frac{1}{4}$ ist. Die Differentialgleichung ist nicht-oszillatorisch, wenn $g(x) \leq \frac{1}{4} \int_x^\infty S_p(t) dt$ für genügend großes x gilt. In Ausdehnung auf das Komplexe wird unter gewissen Voraussetzungen Nullstellenfreiheit der Lösungen in einem Sektor bewiesen. *Collatz* (Hannover).

Stephens, C. F.: Nonlinear difference equations analytic in a parameter. Trans. Amer. math. Soc. **64**, 268—282 (1948).

Folgende Voraussetzungen liegen den beiden ersten Sätzen zugrunde: Die Funktionen $f_i(u_1, \dots, u_n; v; w)$ ($i = 1, \dots, n$) sind im Bereich $|u_v| \leq r_v$, $|v| \geq R$, $|w| \leq \varrho$ bezüglich der u_v und w analytisch, bezüglich v zumindest stetig. Weiter ist $f_i(0, \dots, 0; v; 0) \neq 0$ und die Potenzreihe

$$f_i = \sum_{m=2}^{\infty} \sum a_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}^{(i)}(v) w^{\alpha_0} u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n} \quad (\alpha_v \geq 0, \sum \alpha_v = m)$$

konvergent im angegebenen Bereich; dazu sei angenommen, daß Glieder in dieser Reihe existieren, die w alleine enthalten. Im ersten Satz, der durch ein auf Trjitzinsky zurückgehendes Majorantenverfahren bewiesen wird, ist eine Lösung des Systems der Differenzgleichungen

$$y_i(x+1) = f_i[y_1(x), \dots, y_n(x); x; P(x)] \quad (i = 1, \dots, n)$$

[$P(x)$ ist eine periodische Funktion mit der Periode 1 und gewissen Zusatzbedingungen] angegeben:

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_i^{(k)}(x) P^k(x) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Diese Reihen konvergieren in einem Gebiet D_R zu den in x zumindest stetigen und in $P(x)$ analytischen Funktionen $y_i(x)$. Die $C_i^{(k)}(x)$ lassen sich mit Rekursionsformeln berechnen. Unter D_R wird das Gebiet der komplexen x -Ebene verstanden, dessen Punkte x den Bedingungen:

$$\Re\{x\} \leq 0 \text{ und } |x| > R+1 \quad \text{oder} \quad \Re\{x\} \geq 0 \text{ und } |\Im\{x\}| > R+1$$

genügen. — Der zweite Satz behandelt ähnlich die Differenzgleichungen:

$$y_i(x+1) = P(x) f_i[y_1(x), \dots, y_n(x); x; P(x)] \quad (i = 1, \dots, n).$$

— Indem $P(x)$ als Parameter verwendet wird [$P(x) \rightarrow \equiv 1$], läßt sich dann folgender dritter Satz beweisen: Die Funktionen $f_i(u_1, \dots, u_n; v)$ ($i = 1, \dots, n$) seien im Bereich $|u_v| \leq r$, $|v| \geq R$ bezüglich der u_v analytisch und bezüglich v zumindest stetig. Darüber hinaus sei in diesem Bereich $|f_i| < \frac{r}{4n}$ und $f_i(0, \dots, 0; v) \neq 0$. Dann besitzt das System der Differenzgleichungen

$$y_i(x+1) = f_i[y_1(x), \dots, y_n(x); x] \quad (i = 1, \dots, n)$$

im Gebiet D_R die Lösungen:

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_i^{(k)}(x) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Die $C_i^{(k)}(x)$ werden durch Rekursionsformeln angegeben. — Den Abschluß der Arbeit bilden einige Beispiele [unter anderen: $xy(x+1) = b + ay(x)$] und die Besprechung einiger Abwandlungen in den Voraussetzungen. *Töpfer* (Köln).

Mitrinovitich, D. S.: Sur les nombres de Stirling. Fac. Philos. Univ. Skopje, Sect. Sci. nat. **1**, 49—92 u. franz. Zusammenfassg. 93—95 (1948) [Serbisch].

La première partie de ce travail est relatif à la recherche d'une formule four-

nissant la somme de l'expression

$$\prod_{r=1}^p a_r + \prod_{r=1}^p (a_r + \alpha_r) + \prod_{r=1}^p (a_r + 2\alpha_r) + \cdots + \prod_{r=1}^p (a_r + \overline{n-1} \alpha_r),$$

où n et p sont deux nombres entiers positifs et a_r et α_r , $1 \leq r \leq p$, sont des constantes quelconques. Dans la deuxième partie l'auteur s'occupe avec l'équation $S_{n+1}^m = S_n^{m-1} - n S_n^m$ (n et m entiers) à laquelle satisfont les nombres de Stirling.

N. Obrechhoff (Sofia).

Variationsrechnung:

Morse, Marston: A positive, lower semi-continuous, non-degenerate function on a metric space. Fundam. Math., Warszawa 35, 47—78 (1948).

Es wird die Theorie der kritischen Punkte einer Funktion in einem metrischen Raume auf Grund eines Axiomensystems entwickelt, das bei vielen Variationsproblemen, z. B. dem Problem der geodätischen Verbindungslinien zweier Punkte auf einer zur n -Sphäre homöomorphen Riemannschen Mannigfaltigkeit, leicht zu verifizieren ist. — Es sei S ein metrischer Raum, F eine positive eindeutige Funktion auf S , für die auch der Wert ∞ zugelassen ist. Die Menge derjenigen Punkte p von S , für welche $F(p) \leq c$ (c endlich) ist, wird mit S_c bezeichnet. Ist $F(p) = c < \infty$, so wird unter einer F -Umgebung von p eine Umgebung von p bezüglich einer Menge S_b mit $b > c$ verstanden. Wenn bei einer Deformation einer Teilmenge A von S ein Punkt x zur Zeit t ($0 \leq t \leq 1$) in den Punkt x^t übergeht und wenn dann stets $F(x^t) \leq F(x)$ ist, so spricht man von einer F -Deformation. Ist sogar $F(x^t) < F(x)$ für $x^t \neq x$, so liegt eine eigentliche F -Deformation vor. Die wesentlichen topologischen Eigenschaften eines nichtausgearteten kritischen Punktes geben Veranlassung zu der folgenden Definition. Man sagt, daß ein Punkt σ von S , für den $F(\sigma)$ endlich ist, die Eigenschaft C besitze, wenn es eine eigentliche F -Deformation D_σ einer F -Umgebung $U(\sigma)$ von σ mit den folgenden Eigenschaften gibt: (C') D_σ läßt σ fest und deformiert $U(\sigma)$ in ein r -Element $K(\sigma)$ (= topologisches Bild einer r -dimensionalen Vollkugel), welches σ als inneren Punkt enthält und das, abgesehen vom Punkt σ ganz unterhalb $F(\sigma)$ liegt (für $r = 0$ reduziert es sich auf den Punkt σ). (C'') Die durch D_σ definierte Endabbildung von $K(\sigma) \cap U(\sigma)$ ist auf $K(\sigma)$ unter Festhaltung von σ in die Identität deformierbar. Als dann heißt r der Index des Punktes σ . — S heißt F -reduzibel im Unendlichen, wenn es zu jeder kompakten Teilmenge A von S eine F -Deformation von A in eine Teilmenge S_c gibt. Mit diesen Definitionen lassen sich die der Theorie zugrunde liegenden Axiome folgendermaßen aussprechen: I. In dem metrischen Raume S seien je zwei Punkte durch einen Bogen verbindbar, die Funktion F sei positiv, und die Mengen S_c seien kompakt für jedes endliche c . II. S sei F -reduzibel im Unendlichen. III. Es existiere eine Menge (σ) von Punkten σ in S mit den folgenden Eigenschaften: (1) Jeder Punkt σ habe die Eigenschaft C. (2) Die Anzahl der Punkte σ unterhalb eines jeden endlichen F -Niveaus c sei endlich. (3) Zu jeder endlichen Konstanten c existiere eine eigentliche F -Deformation Δ_c von S_c , bei welcher die Punkte von (σ) in S_c invariant sind und alle anderen Punkte von S_c bewegt werden, während der Wert von $F[E(x)]$ im Endbild $E(x)$ von x in S_c stetig von x abhängt. H. Seifert.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Agostinelli, C.: Sulla integrazione dell'equazione integro-differenziale che regge il fenomeno della diffusione dei neutroni termici. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 5, 140—143 (1948).

Es handelt sich um eine Gleichung des Typus

$$v y \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + \omega f = \omega_0 \int_{-1}^1 f(x, \eta, t) \frac{1 + 3 P y \eta}{2} d\eta, \quad |y| \leq 1,$$

wobei $f(x, y, t)$ die unbekannte Funktion, v, ω, ω_0, P gegebene Konstanten sind. Verf. stellt die Lösungen durch zwei willkürliche Funktionen explizit dar und zeigt die Existenz einer Lösung, die der Nebenbedingung $f(x, y, t) = 0$ für $x = 0, y \geq 0$ genügt.

G. Cimmino (Bologna).

Hebroni, P.: On relations existing between two kernels of the form $(a, b) + b$ and $(b, a) + b$. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 753—756 (1947).

Setzt man bei zwei Integralkernen $a(s, t)$ und $b(s, t)$ im Quadrat $(0, 1)$ in üblicher Weise $(a, b) = \int a(s, u) b(u, t) du$ und ferner $[a, b] = a + (a, b) + b$, also symbolisch: $1 + [a, b] = (1 + a)(1 + b)$, so bedeutet die Gleichung $[a, \bar{a}] = 0 = [a, a]$, daß $a(s, t)$ den lösenden Kern $a(s, t)$ hat. Dann ist a „reziprokabel“, d. h. die zugehörige Fredholmsche Nennerdeterminante $D_a \neq 0$. Nun gilt bekanntlich $D_{[a, b]} = D_a \cdot D_b = D_{[b, a]}$; setzt man also $c = (a, b) + b$ und $e = (b, a) + b$, so hat man bisher die Gleichung $D_{a+c} = D_{a+e}$. Darüber hinaus beweist Verf. hier, daß auch $D_c = D_e$ gilt. Beide Kerne c und e sind also zugleich reziprokabel, und zwar läßt sich für $D_a \neq 0$ zeigen, daß, falls c bzw. \bar{e} existieren, $e = (1 + a) c (1 + a)$ und $\bar{c} = (1 + a) \bar{e} (1 + \bar{a})$ ist.

Bödewadt (Montmorency/Frankreich).

Šerman, D. I.: Über Verfahren zur Lösung einiger singulärer Integralgleichungen. Priklad. Mat. Mech., Moskva **12**, 423—452 (1948) [Russisch].

Gegenstand der Untersuchung ist das System der zwei singulären Integralgleichungen

$$\sum_{j=1}^2 \left\{ a_{kj}(t_0) \omega_j(t_0) + \frac{b_{kj}(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\omega_j(t)}{t - t_0} dt \right\} = f_k(t_0) \quad (k = 1, 2),$$

wo L eine einfache, genügend glatte Kurve bedeutet, die ein endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet S der komplexen Zahlenebene umrandet und t und t_0 Punkte auf L sind. Das Integral ist im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes verstanden. Die Funktionen $a_{kj}(t)$, $b_{kj}(t)$ und $f_k(t)$ sind genügend oft differenzierbar auf L vorgegeben. $a_{kj}(t)$ und $b_{kj}(t)$ sollen ins Innere von L analytisch fortsetzbar und dort regulär sein. Außerdem sollen sie, wie auch $f_k(t)$, der Hölderschen Bedingung genügen, desgl. ihre ersten Ableitungen im Punkte $t = x$. Bei allen einschlägigen Fragen kommt es auf das Verhalten von

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta_2(t) = \begin{vmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) \end{vmatrix}$$

mit $c_{kj}(t) = a_{kj}(t) - b_{kj}(t)$ und $d_{kj}(t) = a_{kj}(t) + b_{kj}(t)$ auf L an. Hier wird zunächst vorausgesetzt, daß Δ_1 auf L eine einfache Nullstelle $t = \alpha$ hat, während Δ_2 auf L und S überhaupt nicht verschwindet. — Unter diesen Voraussetzungen wird durch Konstruktion die Existenz einer stetigen und ebenfalls der Hölderschen Bedingung genügenden Lösung $\omega_j(t)$, $j = 1, 2$, bewiesen. Das geschieht durch Einführung von neuen unbekannten Funktionen

$$\varphi_k(t) = \sum_{j=1}^2 c_{kj} \omega_j(t) - f_k(t) \quad (k = 1, 2)$$

vermittelt einer Methode der analytischen Fortsetzung der Bestimmungsgleichungen ins Innere von L bei mehrfacher Anwendung der Cauchyschen Formel. Das Verfahren führt zu expliziten Ausdrücken für die Lösungsfunktionen, die einen etwas komplizierten, aber elementaren Bau haben. — Dieses Grundproblem wird sodann unter Beibehaltung der Lösungsmethode in mannigfacher Weise variiert. $a_{kj}(t)$ und $b_{kj}(t)$ werden statt ins Innere von L ins Äußere analytisch fortsetzbar und dort regulär vorausgesetzt; das Auftreten von Polen wird zugelassen; statt eines Systems wird nur eine entsprechende singuläre Gleichung mit nur einer unbekannten Funktion (genauer) behandelt, wobei $\Delta_1(t) = a(t) - b(t)$ auf L mehrere Nullstellen, die auch mehrfach sein können, haben kann; die Ausgangsgleichungen werden durch

Glieder $\sum_{j=1}^2 \int_L \omega_j(t) K_{kj}(t, t_0) dt$ auf der linken Seite ergänzt. Im letzteren Fall führt die Methode, falls eine stetige Lösung $\omega_j(t)$, $j = 1, 2$, die ebenfalls der Hölderschen Bedingung genügt, existiert, auf ein System von zwei Fredholmschen Integralgleichungen, das sich als äquivalent dem ursprünglichen System in einer erweiterten Form erweist. — Schließlich wird im Ausgangssystem die Kurve L nicht als geschlossen, dafür aber a_{kj} und b_{kj} als konstant vorausgesetzt. Dann kann das System durch Einführung neuer, geeigneter unbekannter Funktionen $\chi_j(t) = \omega_1(t) + \mu_j \omega_2(t)$ so transformiert werden, daß es in zwei singuläre Gleichungen derselben Art mit nur je einer unbekannten Funktion zerfällt. Diese können sodann nach der Methode von Carleman [Ark. Mat. Astron. Fysik 16, No. 26 (1922)] gelöst werden. Die Separation hat gewisse Ähnlichkeit mit der Hauptachsentransformation. Es besteht für μ_j , $j = 1, 2$, eine charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{12} - \mu a_{22} & a_{22} - \mu a_{21} \\ b_{12} - \mu b_{11} & b_{22} - \mu b_{21} \end{vmatrix} = 0,$$

und eine besondere Betrachtung erfordert der Fall, daß sie eine Doppelwurzel hat. In diesem Fall sind die Koeffizienten der Ausgangsgleichungen in geeigneter Weise abzuändern, so daß wieder zwei verschiedene Wurzeln auftreten, sodann ist die Lösung durchzuführen, und am Schluß lassen sich durch Grenzübergang die Ausgangsbedingungen wieder herstellen. Die ganze Methode läßt sich auch auf ein entsprechendes System von mehr als zwei singulären Gleichungen anwenden.

Svenson (Erlangen).

Ingram, W. H.: The modal oscillations of discrete dynamical systems. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. s. 38, 51—61 (1947).

Es werden die freien und angeregten Schwingungen eines eindimensional schwingenden kontinuierlichen dynamischen Systems untersucht. Werden in dem System von Integro-Differentialgleichungen, welches solche Vorgänge beschreibt, die Integrale durch Summen ersetzt, so ergibt sich ein System von Differentialgleichungen folgender Art:

$$(1) \quad v(x, t) = G \left(A \frac{\partial v}{\partial t} + e(t) \right).$$

Hierin bedeutet G eine Matrix, deren Elemente Greensche Matrizen sind, A eine Matrix, welche die Massen- und Federkonstanten des schwingenden Systems als Elemente enthält, $e(t)$ eine Vektormatrix, durch welche die eingepprägten Kräfte dargestellt werden. — Aus der Annahme, daß $v_i = e^{\alpha t} \cos(\omega t - \beta_i) u_i$, ergibt sich im homogenen Fall für die Vektormatrix u

$$(2) \quad Mu = (\alpha + i\omega) KMu,$$

wobei $K = GA$ und M eine Diagonalmatrix ist. Der inhomogene Fall führt auf eine Gleichung

$$(3) \quad \varphi = (\alpha + i\omega) K\varphi + f$$

(φ und f Vektormatrizen). — Bei der Untersuchung der Lösungen von (2) und (3) wird angenommen, daß G und A nichtsinguläre Matrizen sind, und daß die charakteristischen Zahlen von K von Null und untereinander verschieden sind. Es wird zunächst gezeigt, daß die Vektormatrizen, welche Lösungen des homogenen Problems darstellen, gewissen Biorthogonalitätsrelationen genügen. Sodann werden unter Verallgemeinerung eines von Hilbert angegebenen Verfahrens [D. Hilbert, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-physik. Kl. 1901, 49—91, S. 51] die Lösungen des inhomogenen Problems aufgesucht und eine Bilinearentwicklung des Kerns mitgeteilt. Es folgt eine Anwendung auf das Heaviside-Problem, bei welcher die Lösung nach dem Vorgang von Bromwich durch ein Integral über einen im Komplexen verlaufenden Integrationsweg dargestellt wird. Verf. bemerkt dazu, daß

dieser Weg hier einfacher ist als der der Laplace-Transformation. Am Schluß eine Bemerkung zur Frage der Stabilität der Vorgänge. *Quade* (Hannover).

Duffin, R. J.: Function classes invariant under the Fourier transform. *Duke math. J.* **15**, 781—785 (1948).

Die Funktionen $f_i(x)$ der Klassen I_i ($i = 1, \dots, 5$) sollen folgenden Bedingungen genügen: a) $(-x d/dx)^n f_i(x) \geq 0$ bei $i = 1, 2, 3$ und $(-d/dx)^n f_i(x) \geq 0$ bei $i = 4, 5$ für positive x und $n = 0, 1, \dots$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f_i(x) = 0$ bei $i = 1, 2, 4$ und

$\int_0^\infty f_5(x) dx < \infty$; c) $\lim_{x \rightarrow +0} x f_1(x) = 0$, $\int_0^1 f_i(x) dx < \infty$ bei $i = 2, 4$ und $f_5(x)$

stetig in $+0$; schließlich bc) $\int_0^\infty (1+x)^{-1} f_3(x) dx < \infty$. Durch Darstellung der

$f_i(x)$ als Stieltjessche Integrale von x^{-t} über $(0, 1)$ bei $i = 1, 2, 3$, von $x^{-t}(1-t)$ über $(0, 1)$ bei $i = 2, 3$, von $e^{-x^2 t/2}(1+t)^{\frac{1}{2}}$ über $(0, \infty)$ bei $i = 4$ und von $e^{-x^2 t/2} t^{\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ über $(0, \infty)$ bei $i = 5$ nach einer nichtabnehmenden Funktion wird die Invarianz gegenüber der Fourierschen Sinus- bzw. Cosinus-Transformation der ersten drei bzw. letzten vier Klassen gezeigt. *Szentmártony* (Budapest).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Nakano, Hidegorô: Reduction of Bochner's theorem to Stone's theorem. *Ann. Math.*, Princeton, II. s. **49**, 279—280 (1948).

Bochner's theorem on the integral representation of a continuous positive definite (p. d.) function $\varphi(t)$ ($-\infty < t < \infty$) in the form

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it^2} dv(\lambda)$$

[$v(\lambda)$ being a non-decreasing bounded function], may serve to prove Stone's theorem on the integral representation of continuous one-parameter groups $\{U_t\}$ of unitary operators in Hilbert space H , owing to the fact that $(U_t f, f)$ is, for any fixed $f \in H$, a p. d. function of t [cf. S. Bochner, S.-B. Preuß. Akad. Wiss., math.-physik. Kl., **1933**, 371—376; this Zbl. **7**, 166]. The author proves that, conversely, to every continuous p. d. function $\varphi(t)$, one can construct a Hilbert space H , a continuous one-parameter group $\{U_t\}$ of unitary transformations of H , and an element f of H , such that $\varphi(t) = (U_t f, f)$ holds. [Cf. also I. Gelfand, D. Raïkov, *Mat. Sbornik*, II s. **13**, 301—316 (1943) and R. Godement, following report, theorem 2, where the same result is proved for p. d. functions on an arbitrary locally compact topological group. (Reviewers remark.)] *Béla Sz.-Nagy*.

Godement, Roger: Les fonctions de type positif et la théorie des groupes. *Trans. Amer. math. Soc.* **63**, 1—84 (1948).

C'étaient Gelfand et Raïkov [*Mat. Sbornik*, II. s. **13**, 301—316 (1943)] qui ont étudié les premiers les représentations unitaires de dimension quelconque (finie ou infinie) des groupes G localement compacts et ont démontré l'existence d'un système complet de représentations unitaires irréductibles. Un peu plus tard, mais indépendamment, l'au. a trouvé les mêmes résultats et les a publiés en 1945 et 1946 dans les *C. r. Acad. Sci.*, Paris. Le présent mémoire contient un exposé détaillé de ces résultats et de résultats nouveaux dont les principaux sont: 1° l'extension à un groupe quelconque du théorème d'approximation par des „polynômes trigonométriques“, 2° l'étude du „spectre“ des fonctions du type positif et même d'autres classes de fonctions; une extension du théorème de Bochner, 3° une étude complète du „spectre ponctuel“ d'une représentation unitaire quelconque et des fonctions de type positif, 4° une étude systématique des fonctions de carré sommable sur G , faite au point de vue du produit de composition. Rappel-

lons qu'une fonction continue $\varphi(x)$ sur G est dite de type positif (en signe: $\varphi \in P$) si $\sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j \varphi(s_i^{-1} s_j) \geq 0$ quels que soient les nombres complexes α_i et les éléments $s_i \in G$. En particulier, si $[U_x]$ est une représentation continue de G par des transformations unitaires dans un espace de Hilbert H , et $X \in H$, alors $(X, U_x X) \in P$. Inversement, toute fonction $\varphi(x) \in P$ détermine, à un isomorphisme près, une représentation unitaire continue $[U_x]$ de G telle que a) il existe un $X \in H$ dont les transformés $U_x X$ sous-tendent l'espace entier H , b) $(X, U_x X) = \varphi(x)$. — Ad 1°: L'ensemble $P_0 \subset P$ défini par $\varphi(e) \leq 1$ est convexe, ses points extrémaux sont appelés fonctions élémentaires. Les sommes finies de la forme $\sum \alpha_i \varphi_i(x)$ avec des fonctions élémentaires $\varphi_i(x)$ normées par $\varphi_i(e) = 1$, sont appelées „polynômes trigonométriques“. En appliquant un théorème de Krein-Milman [Studia Math., Léopol 9, 133—137 (1940)], on obtient que toute $\varphi \in P$ est limite faible, dans L^∞ , de polynômes trigonométriques à coefficients positifs. En n'envisageant que le sous-ensemble convexe $A_\varphi \subset P_0$ formé par les fonctions de la forme $\sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j \varphi(s_i^{-1} x s_j)$,

ou sommes finies de telles fonctions, ou encore celles qui sont approchables, uniformément sur tout compact $\subset G$, par de telles fonctions, et en appliquant un lemme de Gelfand sur la convergence faible des fonctionnelles linéaires [Mat. Sbornik, II. s. 4, 235—284 (1938); ce Zbl. 20, 367], on obtient que $\varphi(x)$ est limite, uniforme sur tout compact, de polynômes trigonométriques appartenant à A_φ , à coefficients positifs. On en dérive ensuite que toute fonction continue sur G est approchable, uniformément sur tout compact, par des polynômes trigonométriques. (Pour G compact, c'est le théorème de Peter-Weyl.) — Ad 2°: A tout $\varphi \in P$ on peut associer au moins une mesure positive et de norme finie, définie sur l'ensemble Γ des fonctions élémentaires normées et de leurs limites $\equiv 0$ (dans la topologie faible de l'espace dual de l'espace $L_1(G)$ des fonctions intégrables sur G par rapport à une mesure de Haar dx invariante à gauche), de façon qu'on ait $(f, \varphi) = \int_\Gamma (f, \chi) d\mu(\chi)$ pour tout $f \in L_1(G)$, (f, φ) étant défini par $\int_G f(x) \varphi(x) [\varrho(x)]^{-\frac{1}{2}} dx$ et $\varrho(x)$ par dx^{-1}

$= \varrho(x) dx$. — Ad 3°: Par des raisonnements empruntés à la théorie ergodique, on montre que, pour $\varphi \in P$, l'ensemble des fonctions approchables uniformément sur G par des fonctions $\sum c_i \varphi(s_i^{-1} x)$ ($c_i \geq 0$, $\sum c_i = 1$) contient une fonction constante $M(\varphi)$ et une seule, l'analogue de la valeur moyenne des fonctions presque-périodiques. On démontre qu'il existe une décomposition unique $\varphi = f + g$ avec $f, g \in P$, f presque-périodique sur G et $M(|g|^2) = 0$. — Ad 4°: On montre, en appliquant la théorie des transformations autoadjointes de l'espace de Hilbert, que tout $\varphi \in P^2 = P \cap L_2(G)$ est de la forme $\varphi(x) = \psi * \tilde{\psi}(x)$ où $\tilde{\psi}(x) = \psi(-x) \in P^2$. Tout $\varphi \in P^2$ est limite dans $L^2(G)$ de combinaisons linéaires à coefficients positifs d'éléments $u \in P^2$ tels que $u * \tilde{u} = u$ (unités). — Dans un appendice, on trouve, entre autres, une méthode de construire des représentations irréductibles de dimension infinie de certains groupes discrets, ainsi qu'un exemple montrant que les fonctions élémentaires peuvent avoir pour limite faible des fonctions non-élémentaires.

Béla Sz.-Nagy (Szeged).

Segal, I. E.: Irreducible representations of operator algebras. Bull. Amer. math. Soc. 53, 73—88 (1947).

Let A be a C^* -algebra, i.e. a set of bounded operators in a Hilbert space containing with V, W also $VW, V + W, V^*, \alpha V$ (α any complex number) and closed in the uniform topology. By a „state“ of A there is meant a complex valued linear function ω on A such that $\omega(U^*) = \bar{\omega}(U)$, $\omega(U) \geq 0$ if $U \geq 0$, and such that if U varies in the unit sphere of A ($\|U\| \leq 1$) then the lower upper bound of $\omega(UU^*)$ is 1. Let φ be a representation of A by bounded operators in another

Hilbert space, i. e. a continuous mapping which is an algebraic homomorphism and such that $\varphi(U^*) = [\varphi(U)]^*$. Using a procedure due in part to I. Gelfand and M. Neumark [On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space, *Mat. Sbornik*, II. s. **12**, 197—213 (1943)], it is shown that there exists a mutual correspondence between „normal“ representations (those for which there is an element whose transforms under the representation operators span the space) and the states of the algebra, in which irreducible representations correspond to pure states (a state is pure if it is not a linear combination with positive coefficients of two other states). Applying the theorem of Krein and Milman concerning the extreme points of convex sets in certain Banach spaces [*Studia Math.*, Léopol **9**, 133—137 (1940)] to the set of all states, one obtains the theorem that there exists a complete set of pure states and, consequently, a complete set of irreducible representations for the given algebra. — Now the group algebra of a locally compact group G is isomorphic with a certain C^* -algebra in the Hilbert space of all square-integrable functions (relative to a left Haar measure) on G [cf. I. E. Segal, *Trans. Amer. math. Soc.* **61**, 69—105 (1947)]. Applying the above result, one obtains a new proof of the theorem of Gelfand and Raikov on the existence of a complete set of irreducible strongly continuous, unitary representations on Hilbert spaces [*Mat. Sbornik*, II. s. **12**, 197—213 (1943)]. — A state of A with the property $\omega(UV) = \omega(U)\omega(V)$ is called an „observation“ of A . It is shown that if τ is an observation of a C^* -subalgebra B of a C^* -algebra A , then there exists an irreducible representation φ of A and an element $x \neq 0$, such that for $U \in B$, $\varphi(U)x = \tau(U)x$. A special case of this theorem asserts that the spectrum of a selfadjoint operator in a C^* -algebra is determined by the collection of spectra of the operator in the irreducible representations of the algebra. — The original mathematical model for the observables in quantum theory was the class of all self-adjoint elements of the algebra of all bounded operators in Hilbert space (unbounded operators could be treated in terms of bounded ones). The author thinks, however, that it were more adequate to consider the collection of self-adjoint elements in less restricted C^* -algebras as a model for the observables. According to the results of this paper, any such model is in conformity to the principle that the spectral values of an observable are determined by the behaviour of the observable in the irreducible representations of the operator algebra describing the physical system in question.

Béla Sz. Nagy (Szeged).

Monna, A. F.: Sur les espaces linéaires normés. VI. *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* **52**, 151—160 (1949).

L'A. poursuit ses études (ce. *Zbl.* **29**, 211) sur les espaces normés E sur un corps valué K , la norme sur E étant supposée telle que l'inégalité ultramétrique $\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$ a lieu pour deux éléments quelconques de E (ce qui implique que la valeur absolue sur K est non archimédienne). Dans cet article, il suppose que les valeurs des normes des éléments de E forment une suite croissante (doublement infinie) (C_n) n'ayant que 0 comme point d'accumulation. Soit I l'anneau de valuation dans K , \mathfrak{p} l'idéal de valuation, S un système complet de représentants des classes de I mod. \mathfrak{p} . L'A. montre que pour qu'il existe une suite (ξ_n) d'éléments de E telle que tout $x \in E$ puisse s'écrire $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k} \xi_{n-k}$ avec $a_{n-k} \in S$, il faut et il suffit que, pour chaque $\xi \in E$ tel que $\|\xi\| = C_n$, lorsque a parcourt S , le point $a\xi$ parcourt un système complet de représentants des classes du groupe additif des x tels que $\|x\| \leq C_n$ modulo le sous-groupe des x tels que $\|x\| \leq C_{n-1}$.

J. Dieudonné (Nancy).

Hilding, Sven H.: Linear methods in the theory of complete sets in Hilbert space. *Ark. Mat. Astron. Fysik A* **36**, Nr. 38, 44 S. (1948).

The properties of sets $\{f_n\}$ of elements of Hilbert space \mathfrak{H} are studied in terms.

of the associated linear transformation T defined by $Te_n = f_n$ where $\{e_n\}$ is a fixed complete orthonormal (CON) set in \mathfrak{H} . T need not be closed or have a closed extension, but it may always be chosen such that $T = SH$ where S is bounded with domain $\mathfrak{D}_S = \mathfrak{H}$ and H is positive self-adjoint. $\{f_n\}$ is complete if and only if $(T^*)^{-1}$, or, equivalently, $(S^*)^{-1}$ exists. $\{f_n\}$ is almost a base, i. e. complete and such that $\sum_1^N c_n f_n = 0$ only for $c_n \equiv 0$, if and only if S^{-1} and $(S^*)^{-1}$ exist.

If T and T^{-1} are both bounded, then $\{f_n\}$ is strictly a base, i. e. every element $f \in \mathfrak{H}$ may then be represented in a unique way in the form $\sum_1^\infty c_n f_n$. — Using the

theory of linear transformations, simple proofs can be given of the theorems of Bellman [Bull. Amer. math. Soc., **50**, 517—519 (1944)] on „almost orthonormal“ normalized sets (i. e. such that $\|f_n\| = 1$ and $\sum_{n \neq m} |(f_n, f_m)|^2 = \delta^2 < \infty$) and of

Paley and Wiener [Fourier transforms in the complex domain, New York, 1934, p. 30; this Zbl. **11**, 16] on sets of the form $\{g(x) e_n(x)\}$ where $\{e_n(x)\}$ is CON in L_2 . — The main theorem proved in the paper is the following. Let $\{f_n\}$ and $\{g_n\}$ be given sets in \mathfrak{H} and k a given number, $k > 0$. Let

$$\left\| \sum_1^N c_n (f_n - g_n) \right\| \leq \lambda \left[\left\| \sum_1^N c_n f_n \right\|^k + \left\| \sum_1^N c_n g_n \right\|^k \right]^{1/k}$$

for all sequences of complex numbers $\{c_n\}$ and all N . If $\lambda < \min \{1, 2^{1-1/k}\}$ and $\{g_n\}$ is complete, then $\{f_n\}$ is complete too; and this is the exact bound for λ . — For $k = 2$ this theorem is due to Pollard [Ann. Math., Princeton, II. s. **45**, 738—739 (1944)], generalizing a theorem of Paley and Wiener [l. c., p. 100], where the first sum on the right-hand side does not occur. For $k = 1$, the theorem was first proved by Pollard [l. c.] for $\lambda < 1/\sqrt{2}$ and by the reviewer for $\lambda \leq 1/\sqrt{2}$ [this Zbl. **29**, 144; there one finds also an other generalisation of the Paley-Wiener theorem]. Simplified proofs and generalisations of the theorems of R. P. Boas [Amer. J. Math. **63**, 361—370 (1941); this Zbl. **25**, 254] and N. Bary [C. r. Acad. Sci. URSS, II. s. **54**, 379—382 (1946)] are given, concerning non-ON sets $\{h_n\}$ having a (generalized) Bessel property: $\sum |(f, h_n)|^2 \leq \mu^2 \|f\|^2$ for all $f \in \mathfrak{H}$, or a Riesz-Fischer property: to any given $\{c_n\}$ with $\sum |c_n|^2 < \infty$ there exists an $f \in \mathfrak{H}$ such that $c_n = (f, h_n)$ and $\|f\|^2 \leq \nu^2 \sum |c_n|^2$. — There follow simple proofs of some new and old theorems concerning the completeness of sets $\{f_n\}$ near to a CON set $\{e_n\}$: 1° If $\|f_n\| = 1$ and $\sum (\varrho_n - \frac{1}{4}\varrho_n^2) < 1$ with $\varrho_n = \|f_n - e_n\|^2$, then $\{f_n\}$ is also complete [cf. Hilding, Ark. Mat. Astron. Fysik B **32**, No. 7 (1945)]. 2° If $\{f_n\}$ is an ON set and $\sum \|f_n - e_n\|^2 < \infty$, then $\{f_n\}$ is complete [cf. N. Bary, C. r. Acad. Sci. URSS, II. s. **37**, 83—87 (1942)]. 3° Conversely, if the ON set $\{f_n\}$ is incomplete, then there exists to any given sequence $\{c_n\}$ such that $0 \leq c_n \leq 2$, $\sum c_n = \infty$, a CON set $\{e_n\}$ such that $\|f_n - e_n\|^2 = c_n$. — While these theorems assert the stability of the completeness only by disturbances tending to zero asymptotically, there may be given curves on the unit sphere of \mathfrak{H} , passing through the elements e_n of a given CON set, and such that the completeness is conserved also at non-asymptotical disturbances along these curves. One of the theorems of this type is the following: Let U_t be a one-parameter group of unitary transformations such that $\|U_t - I\| \rightarrow 0$ for $t \rightarrow 0$. If $\{e_n\}$ is a CON set, there exists a $\delta > 0$ such that $\{U_{t_n} e_n\}$ is complete whenever $\|t_n\| < \delta$. Béla Sz.-Nagy (Szeged).

Dixmier, Jacques: Position relative de deux variétés linéaires fermées dans un espace de Hilbert. Rev. sci., Paris **86**, 387—399 (1948).

V étant une variété linéaire fermée (v. l. f.) de l'espace de Hilbert \mathfrak{H} , soit $V' = \mathfrak{H} \ominus V$. Deux v. l. f., V_1 et V_2 , sont dites a) en position p' si $v_{1'2'} = V_1 \cap V_2' = 0$ et $v_{1'2} = V_1' \cap V_2 = 0$, b) en position p'' si $v_{12} = V_1 \cap V_2 = 0$ et $v_{1'2'} = V_1' \cap V_2' = 0$, c) en position p si $v_{12} = v_{12'} = v_{1'2} = v_{1'2'} = 0$. P_Γ étant la projection ortho-

gonale sur V , on appelle $S_V = 2P_V - I$ la symétrie de \mathfrak{H} par rapport à V . On montre que si V_1, V_2 sont en position p' , il y a des symétries de \mathfrak{H} qui échangent V_1 et V_2 . Si de plus V_1 et V_2 sont en position p , il existe une symétrie S_{V_0} et une seule échangeant V_1, V_2 et telle que $(S_{V_0}x, x) > 0$ pour tout $x \in V_1 \cap V_2, x \neq 0$; V_0 est appelée la bissectrice intérieure et V'_0 la bissectrice extérieure de V_1 et V_2 . Pour V_1, V_2 en position p' , $W_1 = V_1 \ominus v_{12}$ et $W_2 = V_2 \ominus v_{12}$ sont des v. l. f. en position p dans $H = \mathfrak{H} \ominus (v_{12} \oplus v_{12'})$; W_0 et W'_0 étant les bissectrices de W_1 et W_2 dans H , on définit les bissectrices intérieure et extérieure de V_1, V_2 par $V_0 = W_0 \oplus v_{12}, V'_0 = W'_0 \oplus v_{12}$; on montre que ces sont en même temps les bissectrices extérieure et intérieure de V'_1 et V'_2 . — Soient V_1, V_2 en position p . Après une étude détaillée des transformations autoadjointes $A = P_{V_1} + P_{V_2} - I, B = P_{V_1} - P_{V_2}$ et $C = i(P_{V_1}P_{V_2} - P_{V_2}P_{V_1})$, on montre que l'anneau $R[P_{V_1}, P_{V_2}]$ engendré par P_{V_1} et P_{V_2} et fermé dans la topologie forte (ou faible, ce qui revient au même), consiste, du moins dans le cas d'un espace \mathfrak{H} séparable, des transformations $F(A) + S_{V_0}G(A)$ où V^0 est la bissectrice intérieure de V_2, V'_1 et F, G parcourent les fonctions mesurables (B) bornées. Il en résulte sans peine que $R[P_{V_1}, P_{V_2}]$ s'obtient de l'anneau $r[P_{V_1}, P_{V_2}]$, engendré algébriquement par ces deux projections, en adjoignant à ce dernier toutes les limites des suites fortement convergentes comprises. Jusqu'ici, on n'a établi le même fait que pour les anneaux $r[A]$ et $R[A]$ engendrés par une seule transformation autoadjointe A [cf. J. v. Neumann, Math. Ann., Berlin 102, 370—427 (1929)]. — En appliquant ces résultats aux images (graphiques) des transformations linéaires [cf. J. v. Neumann, Ann. Math., Princeton, II. s. 33, 294—310 (1932); ce Zbl. 4, 216], on obtient, entre autres, une démonstration élémentaire de la décomposition $T = WK$ d'une transformation linéaire fermée T en produit d'une transformation autoadjointe positive K et d'une autre W isométrique, fait qui se démontre habituellement moyennant la décomposition spectrale de la transformation autoadjointe T^*T et par un calcul fonctionnel. — Puis on démontre quelques propriétés algébriques des transformations, par exemple la suivante: Pour un facteur quelconque M dans \mathfrak{H} [cf. F. J. Murray et J. v. Neumann, Ann. Math., Princeton, II. s. 37, 116—229 (1936); ce Zbl. 14, 161], on a $M = r(M_P)$ où M_P est l'ensemble des projections comprises dans M . — On détermine finalement des invariants unitaires de la figure constituée par deux v. l. f.

Béla Sz. Nagy (Szeged).

Dixmier, J.: Sur un théorème de Banach. Duke math. J. 15, 1057—1071 (1948).

Soit E un espace de Banach, E' son dual, S_r la boule $\|x\| \leq r$ dans E' , V un sous-espace vectoriel de E' ; soit $V^{(1)}$ l'ensemble des λx , où λ est un scalaire arbitraire, et x un élément arbitraire de l'adhérence faible de $V \cap S_1$; la condition $V = V^{(1)}$ est nécessaire et suffisante pour que V soit faiblement fermé dans E' . La condition $V^{(1)} = E'$ équivaut au fait que l'adhérence faible de $V \cap S_1$ contient une boule S_r ; ce théorème avait été démontré par Banach lorsque E est séparable. L'A. appelle caractéristique de V le plus grand nombre $r \geq 0$ tel que S_r soit contenu dans l'adhérence faible de $V \cap S_1$; il donne plusieurs expressions de ce nombre, et montre qu'en remplaçant au besoin la norme de E par une norme équivalente, on peut se ramener au cas où $r = 0$ ou au cas où $r = 1$. Soit V^+ le sous-espace du bidual E'' orthogonal à V ; l'A. dit que V est minimal si c'est un élément minimal de l'ensemble des sous-espaces fortement fermés et faiblement partout denses de E' ; il montre que cela équivaut à ce que E'' soit somme directe de E et de V^+ ; cela entraîne alors $V^{(1)} = E'$. A l'aide de ces notions, il donne des conditions pour qu'un espace de Banach soit isomorphe à un dual d'espace de Banach (avec conservation de la norme) ou simplement topologiquement isomorphe à un tel espace; en particulier, ses résultats lui permettent de prouver que l'espace (c_0) de Banach n'est pas topologiquement isomorphe à un espace dual.

J. Dieudonné (Nancy).

Krejn (Krein), S. G. und B. Ja. Levin: Über Konvergenz singulärer Integrale. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 60, 13—16 (1948) [Russisch].

Es wird das Lebesguesche Problem der Darstellung einer Funktion $f(x)$ bestimmter Klasse als singuläres Integral einer Funktionsfolge $\varphi_n(x, t)$, $n = 1, 2, \dots$, in der Form

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x, t) f(t) dt \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\beta \varphi_n(x, t) dt = 1, \quad a \leq \alpha < x < \beta \leq b,$$

in Punkten, wo $f(x)$ gewisse Eigenschaften besitzt, zugrunde gelegt [Lebesgue, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, Sci. math. Sci. physiq., III. s. 1, 25—117 (1910)] und das allgemeinere Problem des Vergleichs zweier Funktionenfolgen bezüglich der Darstellbarkeit behandelt. Genauer ausgedrückt, werden für gewisse Funktionsklassen $f(x)$ notwendige und hinreichende Bedingungen für die Kernfolgen $\varphi_n(x, t)$ gesucht, damit $f(x)$ durch sie als singuläres Integral in allen denjenigen Punkten darstellbar sei, in denen Entsprechendes für eine gegebene Kernfolge $\Theta_\tau(x, t)$ bzw. Schar mit dem Parameter τ stattfindet:

$$f(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_a^b \Theta_\tau(x, t) f(t) dt.$$

Diese Frage wird in weitgehend verallgemeinerter Weise im Rahmen der allgemeinen Begriffsbildungen der Theorie der Banachschen Räume durch Verwendung von Scharen linearer Funktionale und ihrer Normaldarstellungen gelöst und daraus werden folgende Sätze gewonnen: Damit eine Kernfolge $\varphi_n(x, t)$ jede Funktion $f(x)$ der Klasse L^p in allen den Punkten, in denen $f(x)$ gleich der Ableitung ihres unbestimmten Integrals ist, als singuläres Integral darstellt, ist notwendig und

hinreichend, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\beta \varphi_n(x, t) dt = 1$ ist bei $a \leq \alpha < x < \beta \leq b$ und die Norm $\|\varphi_n(x, t)\| \leq M(x)$ ist, wo $M(x)$ nicht von n abhängt. Damit für die Kernfolge

$\varphi_n(x, t)$ die Gleichung $\sigma'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x, t) d\sigma(t)$ für jede Funktion beschränkter Schwankung $\sigma(x)$ in den Punkten, wo sie differenzierbar ist, besteht, sind folgende

Bedingungen notwendig und hinreichend: 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\beta \varphi_n(x, t) dt = 1$; 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x, t) = 0$ für alle $t \neq x$ im Intervall (a, b) ; 3. $\|\varphi_n(x, t)\| \leq M(x)$, wo $M(x)$ nicht von n abhängt. Svenson (Erlangen).

Krejn (Krein), S. G. und B. Ja. Levin: Über die starke Darstellbarkeit von Funktionen durch singuläre Integrale. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 60, 195 bis 198 (1948) [Russisch].

Diese Arbeit ist ein Pendant zur vorstehenden. An Stelle der Darstellbarkeit einer Funktion $f(x)$ als singuläres Integral einer Funktionenfolge $\varphi_n(x, t)$ in bestimmten Punkten x tritt die so benannte starke Darstellbarkeit, die durch das zusätzliche Auftreten des Zeichens des absoluten Betrages im Integral charakterisiert ist, d. h. die Gültigkeit der Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x, t) |f(t) - f(x)| dt = 0.$$

Im übrigen sind die Problemstellung des Vergleichs zweier Funktionenfolgen bezüglich der Darstellbarkeit, die Methode der Lösung durch Verwendung der Hilfsmittel der Theorie der Banachschen Räume (wobei noch Ergebnisse aus der Theorie der Kegel in Banachschen Räumen von M. Krejn herangezogen werden [Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 28, 13—17 (1940); dies. Zbl. 24, 122]) und die Resultate genau die entsprechenden. — Im Gegensatz zur vorigen Arbeit werden diese Resul-

tate aber nur im Rahmen jener allgemeinen Theorie in Form von Sätzen über additive, homogene, lineare Funktionale und die Konvergenz von Folgen von ihnen gebracht, während die Anwendungen auf das ursprüngliche Problem einer weiteren Arbeit vorbehalten bleiben sollen. Es wird nur vermerkt, daß sich dabei schon bekannte Sätze über die Darstellbarkeit der Funktionen der Klassen M und L^p durch singuläre Integrale in Lebesgueschen Punkten ergeben. *Svenson.*

Praktische Analysis:

● **Jahnke-Emde: Tafeln höherer Funktionen.** Bearb. v. Fritz Emde. 4. neu-bearb. Aufl. Tables of higher functions. Treated by Fritz Emde. Fourth (revised) Edition. Leipzig: B. G. Teubner 1948. XII, 300 S. m. 177 Textfig. DM 11.80.

Das bekannte und sehr geschätzte Nachschlagewerk ist in recht guter, wenn auch nicht ganz friedensmäßiger Ausstattung erschienen. Abgesehen von kleineren Berichtigungen und Ergänzungen ist folgendes zu verzeichnen: Die Tafel des Fehlerintegrals ist sowohl in ihrem Umfang wie durch eine (fünfte) Dezimalstelle erweitert worden. Die Ableitungen des Fehlerintegrals sind weggelassen, dagegen sind die Funktionen $\varphi_n(x)$ des parabolischen Zylinders für $n = 0, 1, \dots, 11$ sowie Tafeln der Laguerreschen Funktionen mit fünf, bzw. vier Dezimalstellen gegeben. Abschnitt VII enthält jetzt eine fünfstellige Tafel der Kugelfunktionen 2. Art $Q_n(x)$ für $n = 0, 1, \dots, 7$. Ferner sind die Tafeln der Zylinderfunktionen im Abschnitt VIII berichtigt und ergänzt worden, besonders bei komplexem Argument und Index. — Diejenigen Benutzer des Buches, welche nur gelegentlich diese oder jene der vielen Tafeln benötigen, hätten es sehr geschätzt, wenn möglichst oft schon in der Überschrift der Tafeln, wie bei den Laguerreschen Funktionen, die Formeln selbst oder Hinweise auf dieselben oder die Figuren gegeben wären, wie es auf S. 50 und an einigen anderen Stellen der Fall ist. Hierfür hätte es auf jeder Seite genug Platz gegeben. Jetzt erfordert die Benutzung manchmal ein vorangehendes kleines Studium: Die oben erwähnten Funktionen $\varphi_n(x)$ des parabolischen Zylinders sind S. 28—31 tabuliert, aber erst auf S. 34 erklärt. (Im Inhaltsverzeichnis wird, und zwar mit Recht, auf S. 26 verwiesen, wo die Betrachtungen mit der Definition der Funktionen $\varphi_n(x)$ beginnen!) Die Hamelsche Formel zur Berechnung des vollständigen elliptischen Integrals dritter Gattung (S. 82) ist leider (ebenso wie in früheren Auflagen) ohne die nötige Bemerkung gegeben, daß sie nur für große Werte des Moduls k , d. h. für kleine Werte von k' oder eigentlich k'/k' angewandt werden darf. — Die wertvolle Tafelsammlung, die lange vergriffen war, wird manchem wissenschaftlichen Rechner gute Dienste leisten. *Nyström (Helsinki).*

Emde, Fritz: Pfeil-Diagramme für Zylinderfunktionen. Z. angew. Math. Mech. 28, 360—368 (1948).

Auf Grund der für die Hankelschen Zylinderfunktionen geltenden Beziehung $H_{-p}^{(1)}(x) = i^{2p} H_p^{(1)}(x)$ werden für verschiedene Parameterwerte p und zunächst für reelles Argument x eine Reihe von anschaulichen Pfeildiagrammen entworfen. Das Verfahren wird weiter für rein-imaginäre Argumente und wachsenden Parameterwert untersucht: Dabei ergeben sich interessante Spiralenbilder. Schließlich wird die Bedeutung dieser einfachen Methode für die Praxis auch für komplexe Argumente an Hand eines Beispiels aus der Wechselstrom-Technik gezeigt. Die Möglichkeit konstruktiver Schwierigkeiten wird für die wichtigsten Fälle eingehend diskutiert. *F. Rehbock (Braunschweig).*

Boothroyd, A. R. and E. Colin Cherry: Analogue calculating machine for functions of a complex variable. Nature, London 163, 687 (1949).

Darstellung rationaler Funktionen einer Variablen mit reellen Koeffizienten durch elektrische Felder, wobei insbesondere die Pole der Funktion durch Punktladungen verkörpert werden. *Bückner (Minden/Westf.).*

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Gichman, I. I.: Über ein Schema zur Bildung zufälliger Prozesse. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 58, 961—964 (1947) [Russisch].

Es seien I' und Φ zwei Hilbertsche Räume, es bedeute I^c eine Menge von Funktionen $\alpha(t, x)$, welche für alle nicht-negativen Werte des Parameters t und für alle Elemente x von I' definiert sind und deren Werte Elemente von I' sind. Wenn P ein Wahrscheinlichkeitsmaß bedeutet, das auf einem Borelschen Mengenkörper von Teilmengen von I^c definiert ist, so sagt Verf., daß das Wahrscheinlichkeitsfeld $\{I^c, P\}$ einen zufälligen Prozeß darstellt. Es sei $f = f[\alpha(t, x)]$ eine P -meßbare Funktion, definiert auf I^c , deren Werte in Φ liegen. Es bedeute Ef den Erwartungswert von f und $E\{\beta(s, y)|_{t'}^{t''}; f\}$ den bedingten Erwartungswert von f unter der Bedingung, daß $\alpha(t, x)$ auf dem Intervall (t', t'') einer gegebenen Funktion $\beta(s, y)$ gleich ist. Es bedeute H den Hilbertschen Raum der Funktionen $f[\alpha(t, x)]$, für die $E\|f[\alpha(t, x)]\|^2 = \|f\|_H^2$ endlich ist. Verf. gibt Bedingungen für die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung $x(t) \in H$ der Gleichungen

$$(1) \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} E \| [x(t + \Delta) - x(t)] - [\alpha(t + \Delta, x(t)) - \alpha(t, x(t))] \|^2 = 0,$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta^2} E \| E\{\beta(s, y)|_{t'}^{t''}; [x(t + \Delta) - x(t) - (\alpha(t + \Delta, x(t)) - \alpha(t, x(t)))] \|^2 = 0,$$

die der Anfangsbedingung $x(\tau) = \xi$ genügt. Somit wird sozusagen das Problem der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen für im allgemeinen nicht-differenzierbare zufällige Funktionen verallgemeinert. Es sei Φ^c der Raum aller Lösungen $x(t)$ der Gleichungen (1) mit der Anfangsbedingung $x(0) = \xi$, $\xi \in \Phi$. Somit ist eine Abbildung von I^c auf Φ^c definiert, und das Wahrscheinlichkeitsmaß P induziert in der üblichen Weise [s. A. Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin 1933; dies. Zbl. 7, 216] ein Wahrscheinlichkeitsmaß Π auf Φ^c und somit einen neuen zufälligen Prozeß $\{\Phi^c, \Pi\}$. Wenn der ursprüngliche Prozeß der Bedingung $P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2)$ genügt, wo A_1 und A_2 zylindrische Teilmengen [s. J. L. Doob, Trans. Amer. math. Soc. 42, 107—140 (1937); dies. Zbl. 17, 27] von I^c sind, welche durch auf fremde t -Intervalle bezügliche Bedingungen definiert werden, so wird der induzierte Prozeß ein Markoffscher. Es werden Bedingungen angegeben dafür, daß in diesem Falle und unter der Voraussetzung, daß I' und Φ Räume von gleicher endlicher Dimensionszahl sind, wenn ferner $f(\xi)$ eine Funktion mit reellen Werten und $x(t)$ die Lösung von (1) bedeutet, $E(f(x(t)))$ als Funktion der in der Anfangsbedingung $x(\tau) = \xi$ vorkommenden Veränderlichen $\xi \in \Phi$ und $\tau \in I'$ der Kolmogoroffschen Differentialgleichung für Markoffsche Prozesse [s. A. Kolmogoroff, Uspechi mat. Nauk 5 (1938)] genüge. Beweise werden nicht gegeben.

A. Rényi (Budapest).

Hartley, H. O.: Approximation errors in distributions of independent variates. Biometrika, Cambridge 35, 417—418 (1948).

Verf. beweist folgenden Satz: „Es seien x und y unabhängige Zufallsvariable mit den Wahrscheinlichkeitsintegralen $F(X)$ bzw. $G(Y)$ und es sei $q = \Phi(x, y)$ eine differenzierbare, nach x monoton zunehmende und in y monotone Funktion. Werden F und G durch die Wahrscheinlichkeitsintegrale $f(X)$ bzw. $g(Y)$ mit den Fehlern $\varepsilon(X)$ und $\eta(Y)$ angenähert und wird das Wahrscheinlichkeitsintegral für q unter Verwendung von f und g bestimmt, so ist der dadurch entstehende Fehler kleiner als $\max |\varepsilon| + \max |\eta|$.“ Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes läßt sich diese Abschätzung leicht auf den Fall von mehr als zwei Zufallsvariablen verallgemeinern.

Georg Friede (Göttingen).

Hoeffding, Wassily and Herbert Robbins: The central limit theorem for dependent random variables. *Duke math. J.* **15**, 773—780 (1948).

Zentrale Grenzwertsätze für abhängige Zufallsveränderlichen X_1, X_2, \dots sind bisher unter sehr einschränkenden Bedingungen und bei Benützung von bedingten Verteilungen abgeleitet worden. Hier wird gezeigt, daß, wenn die Abschnitte $(X_1, \dots, X_r), (X_s, \dots, X_n)$ bei $s - r > m$ mit festem m unabhängig sind, ferner bei $\bar{X}_i = 0, |\bar{X}_i|^3 \leq R^3 < \infty$ und $A_i = \bar{X}_{i+m} + 2 \sum_{j=1}^m \bar{X}_{i+m-j} \bar{X}_{i+m}$ die Ausdrücke

$p^{-1} \sum_{h=1}^p A_{i+h}$ mit $p \rightarrow \infty$ gleichmäßig in $i = 0, 1, \dots$ gegen A streben, dann

$(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$ asymptotisch $(0, A)$ normal ist. Für stationäre Folgen, bei welchen also die Verbindungsverteilungen von X_i, \dots, X_{i+r} für alle $r \geq 0$ von i unabhängig sind, ergibt sich allein bei $\bar{X}_i = 0, |\bar{X}_1|^3 < \infty$ dasselbe Grenzverhalten mit $A = \bar{X}_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{m+1} \bar{X}_1 \bar{X}_j$. Der zweite Satz läßt sich auf zweidimensionale (X_i, Y_i) verallgemeinern unter der Bedingung, daß die Randverteilungen einzeln den eindimensionalen Bedingungen genügen. In der Streuungsmatrix $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ der normalen Grenzverteilung sind A, C jene der Randverteilungen und

$$B = \overline{X_1 Y_1} + \sum_{j=2}^{m+1} (\overline{X_1 Y_j} + \overline{X_j Y_1}).$$

Szentmártony (Budapest).

Marks, Eli S.: A lower bound for the expected travel among m random points. *Ann. math. Statist., Ann Arbor* **19**, 419—422 (1948).

Es handelt sich um folgendes Problem aus dem Gebiet der geometrischen Wahrscheinlichkeiten: In einem einfach zusammenhängenden beschränkten Bereich werden n Punkte willkürlich gewählt und durch Geradenstücke willkürlich so miteinander verbunden, daß jeder Punkt nur einmal direkt berührt wird. Es soll der Erwartungswert für die Länge des Linienzuges nach unten abgeschätzt werden. Unter der einfachen Voraussetzung, daß die in Frage kommenden geometrischen Wahrscheinlichkeiten durch den Flächeninhalt gemessen werden, erhält Verf. als eine untere Schranke für den Erwartungswert den Ausdruck $\sqrt{A/2} \cdot (n-1)/\sqrt{n}$, wobei A der Flächeninhalt des Ausgangsbereiches ist. *Edm. Scholz* (Berlin).

Statistik:

● **Thomson, Godfrey H.:** The factorial analysis of human ability. 3. ed. University of London Press 1948. XVI, 392 p. 20 s.

Bacon, H. M.: A matrix arising in correlation theory. *Ann. math. Statist., Ann Arbor* **19**, 422—424 (1948).

Es wird die Determinante $|r_{ij}|$ mit

$$r_{ij} = r_{ji} = 1 - |i - j| p \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

wobei p eine feste positive Zahl ist, explizit berechnet:

$$|r_{ij}| = 2^{n-2} p^{n-1} [2 - (n-1)p].$$

Edm. Scholz (Berlin).

Daniels, H. E.: A property of rank correlations. *Biometrika, Cambridge* **35**, 416—417 (1948).

Verf. zeigt, daß das von ihm in einer früheren Arbeit [*Biometrika, Cambridge* **33**, 129 (1944)] angegebene allgemeine Maß für die Korrelation zweier Beobachtungsreihen $I = \sum a_{ij} b_{ij} / \sqrt{\sum a_{ij}^2 \sum b_{ij}^2}$ als Maß für die Rangkorrelation geeignet ist, wenn die Übereinstimmungsquoten“ (scores) a_{ij} ($= -a_{ji}$) und b_{ij} ($= -b_{ji}$), die den entsprechenden Paaren i, j der beiden beobachteten Variablen zugeordnet

werden, mit zunehmender Störung der Reihenfolge nicht abnehmen und nur für Paare gleichrangiger Werte der Variablen (tied ranks) Null werden. Von den „Übereinstimmungsquoten“ der in Γ enthaltenen speziellen Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman (ρ) und Kendall (τ) werden diese Bedingungen erfüllt.

Georg Friede (Göttingen).

Birnbaum, Z. W.: On random variables with comparable peakedness. *Ann. math. Statist.*, Ann Arbor 19, 76—81 (1948).

Da zwischen dem mittels des vierten Moments einer Verteilung gemessenen Exzeß (kurtosis) und der Steilheit (peakedness) der Verteilung in der Umgebung eines Wertes der Zufallsvariablen kein eindeutiger Zusammenhang besteht [vgl. I. Kaplansky, A common error concerning kurtosis. *J. Amer. statist. Assoc.* 40, 259 (1945)], schlägt Verf. vor, die relative Steilheit wie folgt zu definieren: „Sind Y und Z reelle Zufallsvariable und Y_1 und Z_1 reelle Konstante, so soll Y in der Umgebung von Y_1 steiler verteilt genannt werden als Z in der Umgebung von Z_1 , wenn für alle $T \geq 0$ die Ungleichung

$$P(|Y - Y_1| \geq T) \leq P(|Z - Z_1| \geq T)$$

gilt“. Bei dieser Definition gelten dann folgende Sätze: 1. „Sind Y und Z kontinuierliche Zufallsvariable, deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen eingipflig und zu Null symmetrisch sind, und ist Y um Null steiler verteilt als Z , so ist auch der

Mittelwert $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ einer Zufallsstichprobe von Y um Null herum steiler

verteilt als der Mittelwert $\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$ einer Stichprobe gleichen Umfangs von Z .“ 2. „Ist Y eine kontinuierliche Zufallsvariable mit einer eingipfligen, zu Null

symmetrischen Wahrscheinlichkeitsverteilung und ist $P(|Y| > a) = 0$ für ein bestimmtes $a > 0$, so gilt für jedes $y \geq 0$ $P(|\bar{Y}_n| \geq y) \leq \Psi_n(y/a)$, wobei

$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ der Mittelwert einer Zufallsstichprobe vom Umfang n und

$$\Psi_n(t) = \frac{2}{n} \sum_{(t+1)n/2 < k \leq n} (-1)^k \binom{n}{k} \left[\frac{n}{2} (t+1) - k \right]^n$$

ist.“

Georg Friede (Göttingen).

Robbins, Herbert: The distribution of Student's t when the population means are unequal. *Ann. math. Statist.*, Ann Arbor 19, 406—410 (1948).

Si abbiano N variabili casuali normali, con la stessa varianza ma con valori medi diversi; si scelgano a caso, con N prove indipendenti, N determinazioni x_1, x_2, \dots, x_N , una per ciascuna variabile casuale; con questi valori si calcolino le espressioni:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}, \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}.$$

Nella prima parte della Nota l'A. determina la funzione di densità della variabile casuale descritta, al variare a caso del gruppo delle N determinazioni, dal parametro:

$t = \sqrt{N} \bar{x}/s$. Nella seconda parte, posto $N = N_1 + N_2$ ed ancora:

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} x_i}{N_1}, \quad s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} (x_i - \bar{x}_1)^2}{N_1 - 1}, \quad \bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_2} x_i}{N_2}, \quad s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_2} (x_i - \bar{x}_2)^2}{N_2 - 1},$$

$$s^2 = \frac{(N_1 - 1) s_1^2 + (N_2 - 1) s_2^2}{N_1 + N_2 - 2},$$

l'A. determina la funzione di densità della variabile casuale descritta dal parametro

$$t = \sqrt{\frac{N_1 \cdot N_2}{N_1 + N_2}} \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s}$$

al variare a caso dei gruppi di N_1 e di N_2 determinazioni. Da alcuni accenni contenuti nella Nota, si è indotti a pensare che l'A. non sia al corrente delle sostanziali obiezioni sollevate da C. Gini al „*t*-test“ fin dal 1939. *G. Pompilj* (Roma).

Guttman, Louis: An inequality for kurtosis. *Ann. math. Statist.*, Ann Arbor 19, 277—278 (1948).

Die Zufallsvariable x habe Mittelwert μ , Streuung σ und $E(x-\mu)^4/\sigma^4 = 1 + \alpha^2$. Für die normierte Variable $t = (x - \mu)/\sigma$ leitet Verf. durch Anwendung der Tschebyscheffschen Ungleichung auf $t^2 - 1 + c$ mit beliebigem festen c die Ungleichungen

$$\text{Prob } \{1 - \lambda\alpha \leq t^2 \leq 1 + \lambda\alpha\} > 1 - \lambda^{-2},$$

$$\text{Prob } \{1 - \alpha\beta \leq t^2 \leq 1 + \alpha(\beta^2 + 2)/\beta\} > 1 - 1/(\beta^2 + 1),$$

$$\text{Prob } \{1 - \alpha(\beta^2 + 2)/\beta \leq t^2 \leq 1 + \alpha\beta\} > 1 - 1/(\beta^2 + 1)$$

mit $\beta = \sqrt{\lambda^2 - 1}$ ab, welche die bekannte Tatsache bestätigen, daß für $\alpha = 0$ die Verteilung von x sich auf die einzigen Werte $x = \mu \pm \sigma$ konzentriert.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Guttman, Louis: A distribution-free confidence interval for the mean. *Ann. math. Statist.*, Ann Arbor 19, 410—413 (1948).

Aus einem beliebig verteilten Kollektiv mit Mittelwert μ und Streuung σ werde eine N -gliedrige zufällige Stichprobe x_1, \dots, x_N mit Mittelwert m und Varianz $s^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2/N$ entnommen. Anwendung der Tschebyscheffschen Ungleichung auf die Variable $u = (m - \mu)^2 - s^2/(N - 1) - c\sigma^2$ mit beliebigem festem c führt zu der Abschätzung

$$\text{Prob } \{(m - \mu)^2 \leq s^2/(N - 1) + \sigma^2 \cdot [c + \lambda \cdot \sqrt{2/N(N - 1) + c^2}]\} > 1 - \lambda^{-2},$$

welche für $c = 0$ sowie für den die rechte Seite der eingeklammerten Ungleichung zum Minimum machenden Wert $c = -\sqrt{2/N(N - 1)(\lambda^2 - 1)}$ die Ungleichungen

$$\text{Prob } \{(m - \mu)^2 \leq s^2/(N - 1) + \lambda\sigma^2 \sqrt{2/N(N - 1)}\} > 1 - \lambda^{-2},$$

$$\text{Prob } \{(m - \mu)^2 \leq s^2/(N - 1) + \sqrt{\lambda^2 - 1} \cdot \sigma^2 \sqrt{2/N(N - 1)}\} > 1 - \lambda^{-2}$$

ergibt. Dieselben sind stets wirksamer als die direkt auf die Variablen $(m - \mu)$ angewandte Tschebyscheffsche Ungleichung, und zwar so, daß mit steigendem λ die relative Wirksamkeit der ersteren im Vergleich zu der letzteren zunimmt. Weiterhin skizziert Verf. eine Ausdehnung des Verfahrens durch Betrachtung höherer Polynome von $(m - \mu)$.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Noether, Gottfried E.: On confidence limits for quantiles. *Ann. math. Statist.*, Ann Arbor 19, 416—419 (1948).

L'A. determina per ogni quantile gli estremi di un intervallo di confidenza relativo ad un determinato coefficiente (di confidenza) ed applica infine i risultati ottenuti al caso particolare della mediana, ritrovando, come nella Nota viene dimostrato, le formule di W. R. Thompson [*Ann. math. Statist.*, Ann Arbor 7, 122—128 (1936) questo Zbl. 15, 310]. — La Nota ha purtroppo scarso interesse scientifico, basandosi sulla teoria degli intervalli di confidenza la quale, salvo casi particolarissimi, è priva come ha osservato C. Gini [*Atti VII. Riun. Soc. Ital. Statist.* (1943)] di ogni consistenza logica.

G. Pompilj (Roma).

Banerjee, D. P.: On the cumulants of β_3 . *Bull. Calcutta math. Soc.* 40, 76 (1948).

In Anlehnung an die von M. G. Kendall (*The advanced theory of statistics*, 1945, I, Kap. 11) gegebene Darstellung der Berechnung der Momente der Stichprobenverteilung von Stichprobenmomenten aus den Kollektivmomenten mit Hilfe der halbinvarianten Schätzungen k_p der Kollektiv-Kumulanten κ_p , und in Fortsetzung der Berechnung des 5. und 6. Momentes von b_2 durch C. T. Hsu und D. N. Lawley [*Biometrika*, Cambridge 31, 238—248 (1940); dies. Zbl. 23, 339]

bestimmt Verf. für $\beta_3 = \mu_3/\mu_2^3$

$$\mu(\beta_3) = 35 \frac{24n(n+1)(n-1)(n+1) \dots (n+5)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-1)^4} k_2^8 \\ + 280 \frac{(n-1)(n+1)(n+3)}{(n-1)^3} \cdot \frac{6n}{(n-1)(n-2)} k_2^6 + 105n.$$

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Smirnov, N.: Table for estimating the goodness of fit of empirical distributions. Ann. math. Statist., Ann Arbor 19, 279—281 (1948).

Tabellen der Funktion

$$L(z) = 1 - 2 \cdot \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v-1} \cdot e^{-v^2 z^2}$$

für $z = 0,28; 0,29; \dots; 3,00$. Diese Funktion ist Grenz-Summenfunktion der Verteilung von $n^{\frac{1}{2}} D_n$, wo n der Umfang einer Stichprobe aus einem mit der Summenfunktion $F(z)$ verteilten Kollektiv und D_n das Maximum der absoluten Abweichung der Stichprobensummenfunktion $F_n^*(z)$ von $F(z)$ bedeutet [vgl. Smirnov, Bull. math. Univ. Moscou 2, 1—16 (1939); dies. Zbl. 23, 249]. *M. P. Geppert*.

Jones, A. E.: Systematic sampling of continuous parameter populations. Biometrika, Cambridge 35, 283—290 (1948).

Für jeden Wert von t im Intervall $[T_0, T]$ sei eine Zufallsveränderliche $X(t)$ mit Mittelwert 0 und Streuung λ gegeben. Die Werte für verschiedene Argumente sind derart korreliert, daß der Erwartungswert von $X(s)X(s+t)$ gleich $\lambda e^{-q|t|}$ ist ($q > 0$). Es soll dann der Betrag

$$\bar{X} = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T X(t) dt,$$

der selbst eine Zufallsvariable ist, abgeschätzt werden, indem n Werte t_i im Intervall gewählt und Messungen $x(t_i)$ von $X(t_i)$ vorgenommen werden. Diese unterliegen Beobachtungsfehlern (mit Mittelwert 0 und Streuung μ), und es wird gefragt, wie die Werte t_i gewählt werden müssen, um den Erwartungswert von

$$[a_1 x(t_1) + \dots + a_n x(t_n) - \bar{X}]^2 \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i = 1 \right)$$

zu einem Minimum zu machen. — Das Resultat läßt sich wie folgt ausdrücken: $a_i = 1/n$; $t_2 - t_1 = \dots = t_n - t_{n-1}$. Für die Endstücke $t_1 - T_0$ und $T - t_n$ werden genaue Formeln angegeben, und es wird gezeigt, daß $(t_1 - T_0)/(t_2 - t_1)$ von λ und μ unabhängig ist und immer zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt. Für praktische Anwendungen wird vorgeschlagen, für t_i entweder $T_0 + \frac{i(T - T_0)}{n+1}$ oder $T_0 + \frac{(2i-1)(T - T_0)}{2n}$ zu wählen, je nachdem, ob der Korrelationskoeffizient zwischen $X(t_i)$ und $X(t_{i+1})$ klein oder groß (etwa größer als $\frac{1}{4}$) ist. *S. Vajda* (Epsom, England).

Kendall, M. G.: Continuation of Dr. Jones's paper. Biometrika, Cambridge 35, 291—296 (1948).

Jones, der Autor des vorsteh. besprochenen Artikels, erlitt einen tödlichen Unfall, bevor die Herausgeber der Zeitschrift Biometrika mit ihm alle Einzelheiten seiner Arbeit besprechen konnten. So sind in der genannten Arbeit nur die Argumentwerte t_i bestimmt worden, welche den Erwartungswert von $(\sum a_i x(t_i) - \bar{X})^2$ zu einem Minimum machen. Der Wert dieses Minimums wurde aber nicht angegeben. — M. G. Kendall, dessen großer Einfluß auf die zeitgenössische englische Statistik auf seiner Fähigkeit beruht, wesentliche Faktoren in statistischen Untersuchungen klar herauszuarbeiten, hat es unternommen, den Ausdruck für das Minimum zu bestimmen. Er hat sich dabei auf Aufzeichnungen gestützt, die Jones hinterlassen hatte. Er fügt auch Bemerkungen hinzu, die die Resultate mit bereits bekannten Tatsachen in Beziehung bringen und ihre Bedeutung klarstellen. So wird u. a.

gezeigt, daß sich für die abgeleiteten Ausdrücke Näherungswerte angeben lassen, welche verschiedene Formen annehmen, je nachdem, ob man bei unbeschränkt wachsendem n das Intervall $T - T_0$ festhält (und dadurch jedes Teilintervall verkleinert), oder ob $T - T_0$ ebenfalls unbeschränkt wächst. *S. Vajda.*

Lehmann, E. L.: On families of admissible tests. Ann. math. Statist., Ann Arbor 18, 97—104 (1947).

Verf. beweist, daß für jede Hypothese H einer Klasse von einfachen Hypothesen eine Schar F von Testkriterien mit folgenden Eigenschaften bestimmbar ist: a) zu jedem gegebenen Kriterium w zur Prüfung von H existiert ein zu F gehörendes Kriterium w' von gleichmäßig mindestens ebenso großer Wirksamkeit (Macht) wie w ; b) kein Glied von F hat eine gleichmäßig ebenso große oder größere Wirksamkeit als ein anderes Glied von F . Es wird ferner die Auswirkung von Annahmen über die H gegenübergestellten Alternativen auf F untersucht. *M. P. Geppert.*

Mosteller, Frederick: A k -sample slippage test for an extreme population. Ann. math. Statist., Ann Arbor 19, 58—65 (1948).

Liegen k n -gliedrige Stichproben einer Meßgröße x vor, so berechnet sich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß diejenige Stichprobe, die den größten x -Wert enthält, r oder mehr Werte enthalte, welche alle Werte aller anderen Stichproben übertreffen, ohne Benutzung der Verteilung, welcher die Stichproben entnommen sind, rein kombinatorisch, zu

$$P(r) = k \cdot n! / (kn - r)! / (kn)! (n - r)!.$$

Für $n \rightarrow \infty$ strebt sie, wie man mittels Stirlingscher Formel und Reihenentwicklung erkennt, gegen $P(r) \sim k^{1-r}$. Verf. tabuliert $P(r)$ für $k = 2, 3, 4, 5, 6$; $n = 3, 5, 7, 10, 15, 20, 25, \infty$; $r = 2, 3, 4, 5, 6$. Auf $P(r)$ gründet Verf. ein Kriterium zur Prüfung der Nullhypothese, daß alle k Stichproben ein und demselben Kollektiv entstammen, wobei vorausgesetzt wird, daß alle Stichproben nur aus Kollektiven stammen können, die der bis auf Verschiebungen gleichen Verteilung $f(x - a_k)$ folgen. Im Gegensatz zu den sonst üblichen statistischen Tests treten hierbei zu den Fehlern 1. und 2. Art solche 3. Art hinzu, die darin bestehen, die Nullhypothese mit Recht abzulehnen, jedoch mit einer unzutreffenden Begründung, wenn nämlich eine andere als die Stichprobe mit dem größten x -Werte der am weitesten nach rechts verschobenen Verteilung entstammt. Für den Spezialfall $k = n = r = 3$ berechnet Verf. unter der Annahme, daß im Kollektiv Rechtecks- bzw. Normalverteilung vorliege, obere und untere Grenzen der Machtfunktion (power function) des Kriteriums. *M. P. Geppert (Bad Nauheim).*

Cochran, W. G. and C. I. Bliss: Discriminant functions with covariance. Ann. math. Statist., Ann Arbor 19, 151—176 (1948).

Die Diskriminantenfunktion wird auf den Fall ausgedehnt, in welchem bestimmte („Kovarianz“-) Variablen in allen Kollektiven gleiche Mittelwerte, also keine Unterscheidungskraft haben. An Stelle der diskriminierenden Variablen werden deren Abweichungen von ihren linearen Regressionen bezüglich aller Kovarianzvariablen in der Stichprobe verwendet, und hieraus wird in der bekannten Weise der „verallgemeinerte“ Abstand der Stichproben nach Mahalanobis bestimmt. Auch die Testkriterien (z. B. Hotellings T -Test) lassen sich auf diesen Fall ausdehnen. *M. P. Geppert (Bad Nauheim).*

Jones, Howard L.: Exact lower moments of order statistics in small samples from a normal distribution. Ann. math. Statist., Ann Arbor 19, 270—273 (1948).

Einem mit Mittelwert 0 und Streuung 1 normal verteilten Kollektiv werde zufällig die Stichprobe $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ entnommen. Verf. berechnet für die Stichprobenumfänge $n = 2, 3, 4$ exakt die Momente erster und zweiter Ordnung der x_j , also $E(x_j)$, $E(x_j^2)$, $E(x_j x_k)$, und leitet eine Reihe von Symmetrieeigenschaften und Summenformeln für dieselben ab. *M. P. Geppert (Bad Nauheim).*

Harris, Marilyn, D. G. Horvitz and A. M. Mood: On the determination of sample sizes in designing experiments. *J. Amer. statist. Assoc.* **43**, 391—402 (1948).

In der vorliegenden Arbeit wird das vor allem auch im angelsächsischen statistischen Schrifttum schon wiederholt behandelte Problem der Abschätzung des Mittelwertes von Normalverteilungen sowie der Signifikanz von Differenzen solcher Mittelwerte aufgegriffen. Es werden insbesondere Methoden zur Bestimmung der bei vorgegebenem Konfidenzintervall erforderlichen Stichprobengröße entwickelt, denen die Annahme zugrundeliegt, daß ein Schätzungsergebnis für die Streuung aus einer vorangegangenen bzw. vorläufigen Erhebung bereits erhalten wurde. Durch Zahlenbeispiele wird eine wesentliche Belebung der Darstellung erreicht. — Zu erwägen wäre nach Ansicht des Ref., ob man sich bei der zahlenmäßigen Behandlung derartiger Problemstellungen nicht noch weit mehr als bisher auch zweckmäßiger nomographischer Verfahrensweisen bedienen sollte. *G. Wünsche.*

Walsh, John E.: On the use of the non central t -distribution for comparing percentage points of normal populations. *Ann. math. Statist., Ann Arbor* **19**, 93—94 (1948).

N. L. Johnson und B. L. Welch [Biometrika, Cambridge **31**, 362—389 (1940); dies. Zbl. **23**, 148] haben in Verallgemeinerung der symmetrischen Studentischen t -Verteilung ($\delta = 0$) die Verteilung der Variablen

$$t = (z + \delta) / \sqrt{\chi^2/f}$$

angegeben und tabuliert, wo δ konstant, z normal verteilt ist mit Mittelwert 0 und Streuung 1 und χ^2 unabhängig von z der χ^2 -Verteilung mit f Freiheitsgraden folgt. Verf. wendet dieselbe an zur Bestimmung von Mutungsbereichen für $\theta_\alpha - \varphi_\beta$, wo θ_α bzw. φ_β die unbekannten α -%- bzw. β -%-Punkte (d. h. diejenigen Werte der stochastischen Variablen, unterhalb welcher genau α bzw. β % liegen) zweier normal verteilter Kollektive mit gleichen Streuungen sind, aus denen zwei Stichproben entnommen werden. Für $\alpha = \beta = 50$ ergibt sich (mit $\delta = 0$) der klassische Studentische Mittelwertvergleich zweier normal verteilter Kollektive mit gleichen Streuungen als Spezialfall.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Pearson, E. S.: Note on Professor Haldane's paper regarding the treatment of rare events. *Biometrika, Cambridge* **35**, 301—303 (1948).

Verf. weist darauf hin, daß bei der zusammenfassenden Behandlung des Falles, daß in zwei aufeinanderfolgenden Stichproben ein seltenes Ereignis in den Häufigkeiten a_1 und a_2 beobachtet wird, durch die Hypothese $a_1 + a_2 = \text{konst.}$ die Häufigkeit von z. B. a_1 einer Binomialverteilung folgt. Im Vergleich mit der in *Biometrika, Cambridge* **35**, 297—301 (1948) vorangehenden Arbeit von J. B. S. Haldane, in der der gleiche Fall eingehend mit Hilfe der Poisson-Verteilung, unter Benutzung von a posteriori bzw. inversen Wahrscheinlichkeiten und einer Kubikwurzeltransformation behandelt wird, zeigt Verf. numerisch an Hand der von Haldane gebrachten Beispiele, daß sein Vorgehen größenordnungsmäßig zu den gleichen Resultaten führt, also die Methode von Haldane praktisch ersetzen kann. Verf. meint, daß seine Methode deswegen vorzuziehen sei, weil dabei nicht die inverse Wahrscheinlichkeit benutzt wird.

Edm. Scholz (Berlin).

Richards, Paul I.: Probability of coincidence for two periodically recurring events. *Ann. math. Statist., Ann Arbor* **19**, 16—29 (1948).

Das folgende statistische Problem wird behandelt: Zwei Ereignisse treten periodisch mit den Perioden T_1 und T_2 auf und haben jedesmal die Dauer t_1 bzw. t_2 . Die Phasen sind unbekannt bzw. willkürlich. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(t)$ dafür, daß während des Zeitraums t beide Ereignisse mindestens einmal für eine Zeit $\geq t_m$ koinzidieren. — Die streng mathematische Lösung dieser Aufgabe ist für die Praxis (Experimentalphysik) bedeutungslos. Da nämlich die Perioden kleinen Schwankungen unterworfen sein können und auch infolge der Beobachtungs-

fehler niemals in aller Strenge bekannt sind, erweisen sich die Ergebnisse der Rechnung als mehr oder weniger illusorisch. Verf. zeigt, daß schon eine sehr kleine Variation der Perioden bewirken kann, daß für genügend große t die Variationsbreite von P das ganze Intervall $0 \leq P \leq 1$ umfaßt. — Es wird versucht, diese Schwierigkeit durch eine Glättung der Wahrscheinlichkeitsfunktion in bezug auf kleine Variationen des Verhältnisses $T_1 : T_2$ zu überwinden. Dieser Versuch gelingt nicht ganz wegen der großen mathematischen (hauptsächlich zahlentheoretischen) Schwierigkeiten. Verf. findet aber eine genäherte Lösung für den Fall, daß t und die Verhältnisse $t_i : T_i$ klein sind. *K. Stumpff* (Vogelsang ü. Seesen).

Horton, H. Burke: A method for obtaining random numbers. Ann. math. Statist., Ann Arbor 19, 81—85 (1948).

Verf. gibt ein Verfahren zur Gewinnung einer Zufallszahlenreihe an, bei dem zunächst eine nur aus den Zeichen $+1$ und -1 bestehende Zufallsreihe hergestellt wird. Jedes Element dieser Reihe ist dabei das Produkt der Ergebnisse von k Zufallsvorgängen, deren jeder eines der Zeichen $+1$ oder -1 mit möglichst gleicher Wahrscheinlichkeit liefert. Die durch Einsetzen des Zeichens 0 an Stelle von -1 und durch Unterteilung in Blocks von je 10 Zeichen entstehende Reihe wird dann als 10-ziffrige Zahlenreihe im Dualsystem aufgefaßt und unter Weglassung aller Zahlen größer als 999 in das Dezimalsystem überführt. Die so erhaltene Reihe von 3-ziffrigen Zahlen stellt dann die gesuchte Zufallszahlenreihe dar. Dieses auf einer Zusammenfassung von mehreren (k) Zufallsvorgängen beruhende Verfahren bietet gegenüber den üblichen Verfahren, die nur einen Zufallsvorgang zur Ermittlung der einzelnen Ziffern verwenden, einmal den Vorteil, daß bei ihm an den einzelnen Zufallsvorgang nicht so hohe Anforderungen hinsichtlich der Gleichmöglichkeit der durch ihn bewirkten Auswahl der Zeichen gestellt werden müssen, da sich durch die Hintereinanderschaltung von genügend vielen Zufallsvorgängen Abweichungen von der Gleichverteilung beliebig verringern lassen. Zum anderen gestattet das Verfahren, Zufallsvorgänge verschiedenster Art (Münzenwurf, Elektronenbewegungen) in einfacher Weise zu verwenden. Der Verlust von $2,34\%$ der zunächst gewonnenen Zeichen, der durch Weglassen der Zahlen über 999 zur Aufrechterhaltung der Gleichverteilung bedingt ist, fällt demgegenüber als Nachteil nicht ins Gewicht.

Georg Friede (Göttingen).

Fiomathematik. Versicherungsmathematik:

Lotka, Alfred J.: Application of recurrent series in renewal theory. Ann. math. Statist., Ann Arbor 19, 190—206 (1948).

Sei p_i die Wahrscheinlichkeit einer weiblichen Lebendgeburt, das i -te Jahr zu überleben, r_i die weibliche Reproduktionsrate des Alters i und $c_i = p_i \cdot r_i$, dann ist die Anzahl der weiblichen Lebendgeburten im Jahre t ($t > \omega$)

$B(t) = \sum_{\alpha}^{\omega} (t - i) c_i$, wo α und ω die untere und obere Grenze der Fruchtbarkeitsperiode sind. Der Ansatz $B(t) = Q \cdot x^{-t}$ ergibt (*) $1 = c_{\alpha} x^{\alpha} + c_{\alpha+1} x^{\alpha+1} + \dots + c_{\omega} x^{\omega}$, also $B(t) = \sum_1^{\omega} Q_j \cdot x_j^{-t}$, wo $x_1, x_2, \dots, x_{\omega}$ die ω Lösungen von (*) sind. Die willkürlichen Konstanten sind aus Anfangsbedingungen, d. h. aus ω gegebenen Werten von $B(t)$, zu ermitteln. Mit $x = 1 + y$ wird (*) zu

$$1 = m_0 + m_1 y + \frac{m_2 - m_1}{2!} y^2 + \frac{m_3 - 3m_2 + 2m_1}{3!} y^3 + \frac{m_4 - 6m_3 + 11m_2 - 6m_1}{4!} y^4 \\ + \dots + c_{\omega} y^{\omega} = \sum_0^{\omega} \frac{m_{[h]}}{h!} y^h,$$

wo die m_h die Momente von c_i , die $m_{[h]}$ die faktoriellen Momente sind, die leichte tabulatorische Berechnung ermöglichen. Die Rechnung wird an einem numerischen

Beispiel durchgeführt, c_i für fünfjährige Altersstufen der weißen weiblichen Bevölkerung der USA 1920, $\omega = 11$, eine positive, vier negative und drei Paar komplexer Wurzeln von (*). Feinere Unterteilung der Altersstufen wäre praktisch bedeutungslos; bei stark schwankenden Geburtenraten r_i wäre allerdings noch ihre Abhängigkeit von der Zeit zu berücksichtigen. — Das vorgeführte diskontinuierliche Verfahren wird eingehend diskutiert und dem kontinuierlichen gegenübergestellt.

Härten (München).

• Morice, E., M. Tisserand et J. Reboul: *Méthodes statistiques en médecine et en biologie*. Paris: Masson, Editeur 1947. XX, 182 p., 53 fig. 480 fr.

Dieses Buch ist für einen Personenkreis bestimmt, der statistische Formeln anwenden will, jedoch nicht ihre exakte mathematisch-wahrscheinlichkeitstheoretische Ableitung sich aneignen kann oder mag. Demgemäß wird eingehend geschildert, welche Regeln und Vorschriften bei der Erhebung von Stichproben zu befolgen sind, und es werden die wahrscheinlichkeitstheoretischen Voraussetzungen, unter denen die einzelnen Formeln gelten, mathematisch vollkommen einwandfrei und ausführlich gebracht. Es fehlt aber die mathematische Ableitung der Formeln aus diesen Voraussetzungen und es werden anstatt dessen ausführliche Beispiele gebracht. — Der behandelte Stoff geht zur Genüge aus der Inhaltsangabe hervor: Classement des observations. Représentation graphique des observations statistiques. Caractéristiques d'une série statistique. Principaux types de distribution. Problème du jugement sur échantillons. Séries statistiques à deux variables. Séries chronologiques. L'observation statistique. Tables numériques et abaque. Notions de mathématiques à l'usage des biologistes.

Edm. Scholz (Berlin).

Levene, Howard: On a matching problem arising in genetics. *Ann. math. Statist.*, Ann Arbor 20, 91—94 (1949).

Vorliegende Arbeit ist ein sehr knapp gehaltener mathematischer Auszug aus einer anderen Arbeit: Th. Dobzhansky, H. Levene [Proof of operation of natural selection in wild populations of *Drosophila pseudoobscura*, *Genetics*, Menasha 33, 537—547 (1948)]. Das biologische Ausgangsproblem ist die Frage, ob die Homozygoten sich vermindern können und trotzdem die Genhäufigkeiten konstant bleiben. Die vom Verf. aufgestellten Rechnungen lösen die Frage, wie bei Panmixie und konstanter Genhäufigkeit die Häufigkeit der Homozygoten rein zufällig variieren kann. Es werden Mittelwert, Streuung und die höheren Potenzmomente berechnet. Die Formeln lassen auch eine Deutung für Kartenspiele zu. Da in den Rechnungen des Verf. keine Größe auftritt, die auf Auslese Bezug nimmt, sieht es so aus, als ob sein Ansatz an der biologischen Fragestellung etwas vorbei geht.

Edm. Scholz (Berlin).

Seal, H. L.: The probability of decrements from a population. A study in discrete random processes. *Skand. Aktuarietidskr.* 1948, 14—45 (1948).

Eine Gesamtheit von Individuen unterliege mehreren Ausscheidewahrscheinlichkeiten wie Tod, Austritt usw. Verf. berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einem bestimmten Zeitraum k Todesfälle und h Austritte stattfinden, wenn vorher y Todesfälle und b Austritte in einem bestimmten Zeitraum stattfanden. Verf. überprüft seine allgemeinen Formeln insbesondere für eine geschlossene und eine offene Gesamtheit, bei der letzteren rechnet er nur mit Todesfällen ohne Austritte. Er gibt für seine Verteilungsfunktionen numerische Beispiele.

Saxer (Zürich).

Segerdahl, C.-O.: Some properties of the ruin function in the collective theory of risk. *Skand. Aktuarietidskr.* 1948, 46—87 (1948).

Verf. prüft mit Hilfe seiner früheren Untersuchungen [*Skand. Aktuarietidskr.* 1942, 43—83; dies. Zbl. 26, 419] den Zusammenhang zwischen der Ruin-Funktion $\psi(n)$ und der Verteilungsfunktion betr. die Risikozahlen allgemein und für spezielle Verteilungsfunktionen. Die Ruinfunktion $\psi(n)$ ist die Wahrscheinlichkeit,

daß die Risiko-Reserve mit einem Anfangswert n negativ werde. Je nach dem Maß der Rückversicherung werden die Verteilungsfunktionen verschieden ausfallen.
Saxer (Zürich).

Klassische theoretische Physik.

Elektrodynamik:

Herpin, A.: Calcul du pouvoir réflecteur d'un système stratifié quelconque. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 182—183 (1947).

Verf. stellt zunächst die bekannten, aus der Maxwell'schen Theorie folgenden Beziehungen für die Komponenten E und H einer ebenen, monochromatischen und linear polarisierten Welle auf, die sich längs der x -Achse durch ein Mittel mit konstanten Werten von ε , μ und σ ausbreitet. Die Lösung wird dann auf Matrizenform gebracht. Damit hat sie die geeignete Gestalt, um auch den Fall rechnerisch zu erfassen, wo sich das Medium aus endlich vielen planparallelen, homogenen Schichten zusammensetzt, deren Materialkonstanten jedoch voneinander verschieden sind. Die resultierende Matrix, aus der der Zustand der Welle nach dem Durchgang durch alle n Schichten des derart zusammengesetzten Mediums abgelesen werden kann, stellt sich in bekannter Weise als Produkt von n transformierten Matrizen dar. Die Rechnungen führen zu der Schlußfolgerung, daß jedes System von n derartigen Schichten einer Kombination von zwei Schichten mit bestimmten Eigenschaften äquivalent ist, jedoch im allgemeinen nicht einer einzigen Schicht. *H. Buchholz.*

Abeles, F.: Sur la propagation normale des ondes dans un milieu stratifié non magnétique. C. r. Acad. Sci., Paris **225**, 569—571 (1947).

Es wird bei senkrechter Inzidenz die Ausbreitung einer monochromatischen, ebenen Welle in einem unmagnetischen Medium untersucht, dessen Brechungsindex $n(z)$ eine Funktion der Koordinate z ist. Dabei knüpft Verf. an die bekannte Arbeit von R. Gans in Ann. Physik, IV. s. **47**, 521—545 (1914) an. Er weist darauf hin, daß sie in dem von Gans nicht untersuchten Fall eines $n(z) = n \cdot (1 + az)^{-2}$ eine besonders einfache explizite Lösung zuläßt. Es wird dieser Fall vom Verf. eingehender durchgerechnet. Es zeigt sich dabei, daß in einem solchen Mittel nur dann eine Reflexion der Wellen auftritt, wenn bei stetiger Änderung von $n(z)$ an irgendeiner Stelle die Ableitung von $n(z)$ unstetig ist. Sehr bemerkenswert ist auch die Feststellung, daß die Geschwindigkeiten, mit denen sich die beiden einzigen vorhandenen Feldkomponenten \mathcal{E}_x und \mathcal{H}_y ausbreiten, verschieden sind. Nur für ein $(a\lambda_0/2\pi)^2 \ll n$ sind ihre Geschwindigkeiten annähernd die gleichen. Verf. betrachtet dann noch den Fall des Durchgangs einer ebenen Welle durch eine planparallele Schicht mit dem obigen, unter Umständen komplexen Brechungsindex $n(z)$, die in zwei homogenen Medien mit den Brechungskoeffizienten n_0 und n_2 eingebettet liegt. Er gibt hierfür das Verhältnis der einfallenden und der durchgelassenen Welle an.

H. Buchholz (Seeheim/Bergstraße).

Honerjäger, Richard: Über die Beugung elektromagnetischer Wellen an einem Drahtgitter. Ann. Physik, VI. s. **4**, 25—45 (1948).

Verf. untersucht theoretisch die Beugung einer ebenen, transversalen und linear polarisierten elektromagnetischen Welle an einem allseitig unendlich ausgedehnten, ebenen Gitter aus äquidistanten, kreiszylindrischen Metalldrähten, wobei er voraussetzt, daß die Leitfähigkeit der Gitterdrähte unendlich groß und ihr Umfang klein gegenüber der Gitterkonstanten und der Wellenlänge der einfallenden Wellen ist. Es wird weiter vorausgesetzt, daß das elektrische Feld der einfallenden Wellen zu den Gitterdrähten parallel schwingt, was aber keine Beschränkung der Allgemeingültigkeit der Überlegungen bedeutet, da die Komponenten, deren elektrisches Feld auf den Gitterdrähten senkrecht steht, ein aus „dünnen“ Drähten bestehendes Gitter ungestört durchdringt. Die Ergebnisse der theoretischen Untersuchung werden in einer Reihe graphischer Darstellungen näher diskutiert und experimentell durch Verwendung von „Rohrwellen“ auf ihre Übereinstimmung mit der Erfahrung geprüft. Diese Rohrwellen bieten gegenüber freien Raumwellen zwei wesentliche Vorteile: 1. Die

elektromagnetische Welle breitet sich ungestört in einem vollständig abgeschlossenen Rohr aus; 2. ein symmetrisch im Rohr angebrachtes Drahtgitter realisiert ein unendlich ausgedehntes Gitter, da die Metallwände des Rohres auf kurze elektrische Wellen wie vollkommene Spiegel wirken, so daß unübersichtliche Beugungserscheinungen, die am Rande eines großen, aber endlich ausgedehnten Gitters auftreten, vermieden werden. Gemessen wird im Wellenlängenbereich $8,5 \text{ cm} < \lambda < 11,4 \text{ cm}$, wobei die Meßergebnisse die theoretischen bestätigen. Benutzt werden die sogenannten H_{10} -Rohrwellen, deren Erzeugung in der Arbeit gleichfalls näher besprochen wird. *Picht* (Potsdam-Babelsberg).

Cullwick, E. G.: An anomaly in electromagnetic theory. *Nature*, London **161**, 969—970 (1948).

Bewegt sich eine Ladung mit konstanter Geschwindigkeit an einer ruhenden Drahtschleife vorbei, so wird in letzterer durch das Magnetfeld der Ladung offenbar eine EMK induziert. Bewegt sich umgekehrt die Drahtschleife mit konstanter Geschwindigkeit an einer ruhenden Ladung vorbei, so sieht Verf. keine Möglichkeit der Induktion irgendeines Stromes in der Drahtschleife außer der geringen Ladungsverschiebung durch Influenz und konstruiert daraus ein Versagen der Maxwell-Lorentzschen Theorie. Er weist darauf hin, daß sich dieser angebliche Unterschied im Rahmen der Ritzschen Theorie deuten lasse. (Anm. des Ref.: Es handelt sich hier ersichtlich um einen Effekt, der in der Relativgeschwindigkeit von zweiter Ordnung ist. Daher darf hier nicht mehr mit den primitiven unrelativistischen Anschauungen gearbeitet werden, vielmehr muß man hier alle relativistischen Effekte der Längenänderung, Feldverzerrung usw. berücksichtigen!) *F. Sauter*.

Relativitätstheorie:

Clark, G. L.: The gravitational field of a rotating nearly spherical body. *Philos. Mag.*, J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. s. **39**, 747—778 (1948).

L'A. indique des formules très compliquées pouvant représenter les champs extérieur et intérieur d'un corps ellipsoïdal quasi-sphérique en mouvement de rotation arbitraire autour de son centre. Le champ intérieur, partout régulier dans le corps, est posé a priori, satisfaisant seulement aux conditions de raccordement de Schwarzschild et le tenseur d'énergie correspondant en est déduit. Des applications sont données aux champs d'un ellipsoïde de révolution quasi-sphérique en mouvement de rotation uniforme autour de son axe et à ceux d'une masse sphérique en mouvement de rotation uniforme. *Licknerowicz* (Strasbourg).

Papapetrou, A.: Static spherically symmetric solutions in the unitary field theory. *Proc. Irish. Acad. A* **52**, 69—86 (1948).

Dans le cadre de la théorie unitaire de Einstein-Straus-Schrödinger, l'A. recherche certaines solutions à symétrie sphérique particulièrement intéressantes des équations du champ. Un tenseur fondamental g_{ik} , à symétrie sphérique, admet en coordonnées polaires les composantes

$$g_{ik} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 & w \\ 0 & -\beta & r^2 v \sin \theta & 0 \\ 0 & -r^2 v \sin \theta & -\beta \sin^2 \theta & 0 \\ -w & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, v, w$ sont des fonctions de r . Le problème général consisterait à déterminer toutes les fonctions telles que g_{ik} satisfasse aux équations du champ de Schrödinger. L'A. se restreint aux cas $v = 0, w \neq 0$ et $v \neq 0, w = 0$. Les solutions trouvées conduisent à de grosses difficultés dans les deux interprétations usuelles, celle dans laquelle la partie antisymétrique g_{ik} du tenseur fondamental donne directement le champ électromagnétique et celle qui fait intervenir le tenseur adjoint de g_{ik} . En particulier le comportement asymptotique des solutions est très différent de celui correspondant au point chargé en relativité générale classique. Ces difficultés semblent liées à la possibilité de définir le tenseur d'impulsion-énergie du champ g_{ik} . Afin de tenter d'éclaircir ces difficultés, l'A. forme la seconde approxi-

mation des équations du champ [pour la première, voir Einstein-Straus, Ann. Math. Princeton, II. s. 47, 731—745 (1946)]. Il semble alors à l'A., comme au rapporteur, que l'interprétation de g_{ik} comme donnant le champ électromagnétique se révèle insoutenable, à moins de modifier très profondément nos idées sur ce champ. Ce papier se distingue par un souci très heureux de l'interprétation physique aux différents stades.

Lichnerowicz (Strasbourg).

Hoffmann, Banesh: The vector meson field and projective relativity. Physic. Rev., Minneapolis, II. s. 72, 458—465 (1947).

Die Arbeit gibt für das Schema der projektiven Relativitätstheorie ein allgemeines Variationsprinzip, wobei als Lagrange-Funktion eine aus der invarianten Krümmung gebildete Größe vom Index 0 verwendet wird, die aus einem allgemeinen 5-dimensionalen Tensor $G_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 4$) gebildet ist. Als Feldgleichungen ergeben sich Gleichungen, welche Schwerefelder und Vektor-Meson-Felder enthalten.

Bechert (Mainz).

Ludwig, Günther: Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie. Arch. Math., Oberwolfach 1, 212—218 (1949).

Es handelt sich um ein Selbstreferat des Verf. über ein unter demselben Titel in Druck befindliches Buch. Darnach enthält dieses Buch zunächst eine Einführung in den quinären Tensorkalkül projektiver und der quaternären Tensorkalkül affiner Koordinaten und deren gegenseitige gruppentheoretische Beziehungen. Der Übergang von der projektiven zur affinen Beschreibung ist der Reduktion der Gruppe \mathfrak{D}_5 der fünfdimensionalen Drehungen (und ihrer Darstellungen) auf die Gruppe \mathfrak{D}_4 der Lorentztransformationen äquivalent. Unter den Darstellungen der \mathfrak{D}_5 werden mit Benutzung bekannter Ergebnisse von H. Weyl insbesondere diejenigen durch Diracsche Spinoren ausführlicher behandelt. — Die Feldgleichungen werden aus einem Variationsprinzip $\delta \int_{(B_3)} (\mathfrak{G} + \mathfrak{L}) dX^0 \dots dX^4 = 0$ hergeleitet, wobei \mathfrak{G} nur von der Metrik und \mathfrak{L} auch von

Materievariablen abhängt. — Als Lösung der Feldgleichungen wird ein vom Verf. bereits früher eingeführtes kosmologisches Modell betrachtet [vgl. G. Ludwig, Arch. Math., Oberwolfach 1, 80—82 (1948); dies. Zbl. 31, 384]. Auf diese Weise ergibt sich auch eine Begründung der von P. Jordan jüngst aufgestellten Kosmologie [vgl. P. Jordan, Die Herkunft der Sterne, Stuttgart 1947].

M. Piel (Köln).

Atomphysik.

Quantenmechanik:

● **Gombás, P.:** Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen. Wien: Springer-Verlag 1949. VIII, 406 S. u. 59 Textabb.

Bei der Behandlung von Mehrelektronenproblemen erfordern die Näherungsmethoden der Quantenmechanik einen sehr großen Rechenaufwand. Für viele Fragen, besonders aus den Anwendungen der Atomphysik, genügen weniger detaillierte Ergebnisse. Man kann dann die von Thomas und Fermi begründete statistische Theorie des Atoms benutzen. — In dem Buch werden quantenmechanische Kenntnisse nicht vorausgesetzt; die mathematischen Anforderungen sind gering. Im ersten Teil werden das Modell von Thomas und Fermi sowie seine Korrekturen und Erweiterungen behandelt, der zweite Teil geht auf die Anwendungen für Atome, Moleküle, Kristalle und Materie unter hohem Druck ein. Im Anhang werden Tabellen mit Lösungen der Thomas-Fermischen und der Thomas-Fermi-Diracschen Gleichung gegeben. Das Buch ist für den auf dem Gebiet der Atomphysik tätigen Physiker von Bedeutung als zusammenfassende Darstellung mit vollständigen Literaturangaben und ist wegen der klaren und verständlichen Darstellung auch zur Einführung in die statistische Theorie des Atoms geeignet.

Möglich (Berlin).

Landsberg, P. T.: On the occurrence of detailed balancing in quantum mechanics. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. s. 38, 824—828 (1947).

Es werden die notwendigen Voraussetzungen in der Algebra der quantenmechanischen Operatoren diskutiert, damit für die quantenmechanischen Übergangswahrscheinlichkeiten die Reziprozitätsbeziehung $p_{AB} = p_{BA}$ gilt.

F. Sauter (Göttingen).

Flint, H. T.: Co-ordinate operators in quantum mechanics. Nature, London 163, 131—132 (1949).

Verf. schlägt (ohne nähere Begründung) vor, daß die Raum-Zeit-Koordinaten x in der Quantenmechanik durch Operatoren der Art

$$X = x - \frac{\hbar}{m_0 c^2} u_x \quad \text{mit} \quad u_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} \varphi_x$$

zu ersetzen sind, wobei die φ_x die Komponenten des gewöhnlichen vierdimensionalen Vektorpotentials darstellen. Als weitere Ergänzung könnte nach Verf. in Analogie zum Drehimpulsoperator auf der rechten Seite noch additiv ein Spinglied hinzugefügt werden. Wesentliche Konsequenzen werden aus diesem Vorschlag jedoch nicht gezogen.

F. Sauter (Göttingen).

Fischer, Otto F.: Why not discard the spinor calculus? *Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics*, VII. s. 39, 878—884 (1948).

Verf. plädiert für den Ersatz der in der Diracschen Wellengleichung enthaltenen Spinoren durch die ihm vertrauterer Quaternionen, zeigt aber nicht, wie in diesem Fall die Wellengleichung für Elektronen im besonderen in einem elektromagnetischen Feld aussehen würde, und bleibt auch den Beweis dafür schuldig, daß eine solche Wellengleichung zu physikalisch brauchbaren Resultaten führt.

F. Sauter.
Born, Max: Elementary particles and the principle of reciprocity. *Nature*, London 163, 207—208 (1949).

Nach dem vom Verf. aufgestellten Reziprozitätsprinzip sollen die physikalischen Grundgesetze symmetrisch in den Raum-Zeit-Koordinaten x^k und in den Impuls-Energie-Komponenten p_k sein. Im besonderen soll dies für die Lagrange-Funktionen gelten, aus denen die Wellengleichungen für die einzelnen Teilchen in üblicher Weise gewonnen werden können. Im einfachsten Fall von Teilchen ohne Spin muß sich dann die Lagrange-Funktion aus den Eigenfunktionen des Operators $x^k x_k + p^k p_k$ (Summation über k von 1 bis 4!) bei entsprechend gewählten Einheiten ableiten lassen. Als relativistisch invariante Eigenfunktionen dieses Operators findet Verf. Funktionen, die Laguerresche Polynome von $P = p^k p_k$ als Faktoren enthalten. Identifiziert man sie im einfachsten Fall mit den gesuchten Lagrange-Operatoren, die angewandt auf eine Wellenfunktion, Null ergeben, so kommt man zu Wellengleichungen der Form $(p^k p_k - P_0) \psi = 0$, wobei die P_0 durch die Nullstellen der oben erwähnten Laguerreschen Polynome gegeben werden und mit den Quadraten der Ruhemassen der durch diese Gleichungen beschriebenen Teilchen identifiziert werden können. Man kommt auf diese Weise zu einem unendlichen Spektrum für die Ruhemassen von Elementarteilchen.

Sauter (Göttingen).

Green, H. S.: Quantized field theories and the principle of reciprocity. *Nature*, London 163, 208—209 (1949).

Mathematische Weiterführung der im vorstehenden Referat angegebenen Grundvorstellungen Borns. Verf. spricht die Hoffnung aus, daß auf diesem Weg auch die Wechselwirkung zwischen den Elementarteilchen deduktiv gewonnen werden kann.

F. Sauter (Göttingen).

Cheng, Kai-Chia and Antonio E. Rodriguez: Particles with spin and the principle of reciprocity. *Nature*, London 163, 367—368 (1949).

Die Bornschen Vorstellungen über die Aufstellung von Lagrange-Funktionen aus dem Reziprozitätsprinzip (vgl. die vorsteh. Referate) werden auf den Fall von Teilchen mit dem Spin $\frac{1}{2}$ angewandt. Es ergeben sich hier zwei Typen von Wellengleichungen, von denen der erste Teilchen der Masse 0 darstellt, entsprechend Photonen, jedoch mit halbzahligem Spin, während der zweite Satz von Wellengleichungen zu Teilchen mit Massen in der Größenordnung der Mesonenmasse gehört.

F. Sauter (Göttingen).

Bohm, D. and M. Weinstein: The self-oscillations of a charged particle. *Physic. Rev., Minneapolis*, II. s. 74, 1789—1798 (1948).

In dieser Arbeit untersuchen Verff. ein räumlich ausgedehntes Elektron mit kugelsymmetrischer, starrer Ladungsverteilung. Die Bewegungsgleichungen folgen

durch exakte Berücksichtigung des retardierten Eigenfeldes. Im kräftefreien Fall gibt es strahlungslose, periodische Bewegungen des Ladungsmittelpunktes mit einer Amplitude kleiner als der Elektronenradius und etwa der Frequenz 10^{23} sec^{-1} . Instabilitäten wie beim klassischen Dirac-Elektron treten nicht auf. Eine Quantelung wird in Aussicht gestellt; mit obiger Frequenz ergibt eine Abschätzung der Energie des ersten angeregten Zustandes die Größenordnung der Meson-Ruhenergie.

Höhler (Berlin).

Tomonaga, Sin-Itiro: On infinite field reactions in quantum field theory. *Physic. Rev.*, Minneapolis, II. s. 74, 224—225 (1948).

Zusammenstellung und kurze Besprechung der neuen japanischen Arbeiten zum Selbstenergieproblem.

Höhler (Berlin).

Mott, N. F.: Note on the slowing down of mesons. *Proc. physic. Soc. London*, Sect. A 62, 136—137 (1949).

Von E. Fermi, E. Teller und V. Weißkopf [*Physic. Rev.*, Minneapolis, II. s. 71, 314 (1947)], sowie von E. Fermi und E. Teller [*Physic. Rev.*, Minneapolis, II. s. 72, 399—408 (1947)] ist eine Formel für den Energieverlust langsamer Mesonen beim Durchqueren eines Metalls angegeben worden:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{m^2 e^4 V^2}{\hbar^3} \ln \frac{137 v_0}{c},$$

wo m und e Masse und Ladung des Elektrons, v_0 die Grenzggeschwindigkeit im entarteten Fermi-Gas und $V (\ll v_0)$ die Geschwindigkeit des Mesons bedeuten. Indem gezeigt wird, daß dieselbe Formel sich ergibt bei der Berechnung des Restwiderstandes eines Metalles auf Grund von Gitterstörungen durch Fremdionen und daß hier die Formel empirisch sehr gut bestätigt wird, wird die Formel erneut bekräftigt und werden gewisse Bedenken gegen ihre Geltung beseitigt. H. Volz.

Preston, Melvin A.: The electrostatic interaction and low energy particles in alpha-radioactivity. *Physic. Rev.*, Minneapolis, II. s. 75, 90—99 (1948).

Angeregt durch die anomalen Feinstrukturverhältnisse der α -Strahlen von Polonium und Radium, wird die Bedeutung der Energieübertragung von den emittierten α -Teilchen nach den neuentstandenen Kernen auf Grund der asymmetrischen elektrostatischen Wechselwirkung nach der Emission untersucht. Die quantenmechanische Rechnung ergibt für die energieärmeren Teilchen eine Abweichung von den nach dem Geiger-Nuttallschen Gesetz zu erwartenden Werten. Jedoch ist der Unterschied nur bemerkenswert, wenn die Energiedifferenz zwischen dem betrachteten angeregten Zustand des neuen Kernes und seinem Grundzustand weniger als $5 \cdot 10^5 \text{ eV}$ beträgt. Zur Erklärung der experimentellen Abweichungen erweisen sich die betrachteten Prozesse jedoch als unzulänglich. Ecker.

Simons, Lennart: On the binding energy of positronium chloride. *Comment. phys.-math., Soc. Sci. Fennica* 14, Nr. 2, 28 S. (1948).

Bau der Materie:

● **Wilson, A. J. C.:** X-ray optics: the diffraction of x-rays by finite and imperfect crystals. (Methuen's Monographs on Physical Subjects.) London: Methuen and Co., Ltd. 1949. VII, 127 p. 6 s. net.

Koppe, Heinz: Zur Theorie der Supraleitung. II. Die Berechnung der Sprungtemperatur. *Z. Naturforsch.* 3a, 1—5 (1948).

Nach Heisenberg ist die Supraleitung auf die Ausbildung von besonderen Wellenpaketen der Leitungselektronen zurückzuführen, was gleichbedeutend ist mit der Ausbildung einer bestimmten Struktur der Oberfläche der Fermi-Kugel der Elektronenverteilung. Nunmehr gelingt es dem Verf., die dadurch bedingte, von Heisenberg nur abgeschätzte Energieänderung des Elektronengases genauer zu ermitteln und so zu einer Beziehung für die Temperatur des Sprungpunktes zu

kommen. Danach kann Supraleitung grundsätzlich nur unterhalb einer bestimmten oberen Temperaturgrenze eintreten. Der Vergleich mit den gemessenen Sprungpunkten zeigt zwar die richtige Größenordnung, jedoch auch eine beträchtliche Streuung der Meßwerte um die so gefundene theoretische Kurve. *F. Sauter.*

Jellinghaus, W. und H. Schlechtweg: Zur Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung von Nickel. *Ann. Physik*, VI. s. 2, 161—177 (1948).

Durch neuerliche Auswertung der alten Messungen von P. Weiß und R. Forrer über die Magnetisierung des Nickels versuchen Verf. die alte Weißsche Theorie des Ferromagnetismus auf ihre Tragfähigkeit zu überprüfen. Sie finden zwar Konstanz der Sättigungsmagnetisierung innerhalb des Meßbereiches, doch erhalten sie für den Zahlenfaktor W des inneren Weißschen Feldes je nach der Art der Bestimmung die verschiedensten Werte. Und zwar ergeben sich sowohl aus den Kurven konstanter Magnetisierung wie aus der Feldstärkenabhängigkeit der Magnetisierung bei konstanter Temperatur annähernd übereinstimmende Zahlenwerte von W , die aber mit zunehmender Temperatur stark ansteigen. Im Gegensatz dazu finden sie aus der Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung bei konstanter Feldstärke einen zwar konstanten W -Wert, der aber wesentlich höher liegt als die auf andere Weise gefundenen. *F. Sauter (Göttingen).*

Döring, W.: Die Temperaturabhängigkeit der Anfangssuszeptibilität von Nickel unter Zug. *Z. Physik* 124, 501—513 (1948).

Verf. geht aus von der klassischen Behandlung der Blochschen Spinwellen in einem Ferromagnetikum, die er gegenüber der Methode von Heller und Kramers wesentlich vereinfacht. Aus der Statistik dieser Wellen erhält man die freie Energie des magnetisierten Zustandes und daraus durch Ableitung nach dem Feld die Magnetisierung. Für tiefe Temperaturen kommt man so leicht zum $T^{3/2}$ -Gesetz von Bloch. In völlig analoger Weise behandelt nun Verf. auch den Einfluß einer äußeren Zugspannung und kommt so zu einer Formel für die Anfangssuszeptibilität, welche sich als verkehrt proportional der angelegten Zugspannung und der Magnetisierung erweist. Der Vergleich mit Messungen an Nickel zeigt allerdings, daß die (unter gewissen Vernachlässigungen abgeleitete) theoretische Formel besonders bei höheren Temperaturen etwas zu kleine Werte liefert. *F. Sauter (Göttingen).*

Stoner, E. C. and E. P. Wohlfahrt: A mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys. *Philos. Trans. R. Soc. London, A* 240, 599—644 (1948).

Zur Deutung der hohen Koerzitivkräfte bei gewissen ferromagnetischen Mischkristallen nehmen die Verf. an, daß es in diesen Materialien kleine, durch die Mischstruktur bedingte, festliegende Weißsche Bezirke gibt, in denen bei Änderung des äußeren Feldes nur Drehprozesse der Magnetisierung, nicht aber Wandverschiebungen vorkommen können. Zum Studium solcher Drehprozesse betrachten die Verf. magnetische Inseln von der Gestalt eines homogen magnetisierten Rotationsellipsoides (und nur anhangsweise auch von der Gestalt eines dreiaxigen Ellipsoides) und ermitteln nun die resultierende Magnetisierung als Funktion der angelegten Feldstärke, der Orientierung der Ellipsoide gegen die Feldrichtung und des Achsenverhältnisses. Die so gewonnenen Kurven werden in Beziehung gesetzt zu den Verhältnissen (a) bei nicht ferromagnetischen Mischkristallen mit magnetischen Einschlüssen, (b) bei Magneten in Pulverform, (c) bei Mischkristallen hoher Koerzitivkraft. *F. Sauter (Göttingen).*

Salpeter, E. E. and R. E. B. Makinson: On the dielectric properties of a gas discharge. *Proc. phys. Soc. London, Sect. B.* 62, 180—188 (1949).

Zwei Elektroden, die in den Raum einer Gasentladung hineinragen, mögen mit einer hochfrequenten Wechselspannung ($\approx 10^9$ Hertz) verbunden werden. Unter mehreren vereinfachenden Voraussetzungen werden in der vorliegenden Arbeit allgemeingültige Formeln für die räumliche Stromdichte und für den Elektrodenstrom hergeleitet. Als entscheidender Parameter geht in die Betrachtungen

die Größe $\beta = v/\omega d$ ein, wo v die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen im Gasraum, ω die Schwingungsfrequenz und d den Elektrodenabstand bezeichnet. Für $\beta = 0$ läßt sich das Verhalten der Gasentladung durch ein isotropes Dielektrikum mit fehlender Leitfähigkeit beschreiben, dessen Dielektrizitätskonstante durch die Formel $(1 - 4\pi n e^2/m\omega^2)$ gegeben wird. Für den Fall $\beta \gg 0$ können nur Abschätzungen angegeben werden, jedoch ergeben sich wesentliche Änderungen. *Ecker*.

Cahn, Julius H.: Electron velocity distribution function in high frequency alternating fields including electronic interactions. *Physic. Rev.*, Minneapolis, II. s. 75, 838—841 (1949).

In Erweiterung der Untersuchungen von Margenau über die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen in einer hochfrequenten Gasentladung geringer Stromstärke wird hier eine Lösung der Boltzmannschen Differentialgleichung für beliebige Elektronendichten bestimmt. Das allgemeine Ergebnis wird für die Fälle eines konstanten und eines zur Geschwindigkeit umgekehrt proportionalen Wirkungsquerschnittes Elektron-Molekül weiterdiskutiert. Die Ergebnisse zeigen über die Margenauschen Berechnungen hinaus die Abhängigkeit der Verteilungsfunktion der Geschwindigkeit und der komplexen Leitfähigkeit von der Elektronendichte.

Ecker (Siegburg).

Cahn, Julius H.: Electronic interaction in electrical discharges in gases. *Physic. Rev.*, Minneapolis, II. s. 75, 293—300 (1949).

Zur Bestimmung der Elektronengeschwindigkeitsverteilung in einer Gasentladung niedriger Spannung und hoher Stromstärke wird eine Lösung der Boltzmannschen Differentialgleichung für beliebige Elektron-Molekül-Wirkungsquerschnitte gegeben. In Erweiterung der Davydovschen Theorie wird neben den elastischen Stößen auch die elektrostatische Wechselwirkung der Elektronen untereinander nach einem von Landau angegebenen Näherungsverfahren berücksichtigt. Nimmt man den Wirkungsquerschnitt umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit an, so ergibt sich für alle Elektronendichten die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung, während man für konstanten Wirkungsquerschnitt für kleine Elektronendichten die Davydovsche und bei großen Elektronendichten wiederum die Maxwellsche Verteilungsfunktion berechnet.

Ecker (Siegburg).

Astrophysik. Geophysik.

● **Rosseland, Svein:** The pulsation theory of variable stars. (International Series of Monographs on Physics.) Oxford: Clarendon Press; London: Oxford University Press 1949. VIII, 152 p. 18 s. net.

Miczaika, G. R.: Bemerkungen zur hydrodynamischen Behandlung von Sternsystemen. *Astron. Nachr.* 276, 169—172 (1948).

Erörterung bekannter hydrodynamischer Eigenschaften des Sternsystems. Neue Ergebnisse werden nicht erzielt.

W. Fricke (Hamburg).

Steinwedel, Helmut und J. Hans D. Jensen: Zur Zustandsgleichung bei hohen Temperaturen und Dichten. *Z. Physik* 125, 394—404 (1949).

Es wird die Zustandsgleichung der Materie bei Temperaturen der Größenordnung $kT \sim 1 \text{ MeV}$ und solchen Dichten erörtert, die zwar noch nicht die Dichte der Kernmaterie erreichen, aber erheblich über der Dichte in „normalen“ Sternen liegen.

— In dem Massenwirkungsgesetz $\frac{\rho_{ZN}}{\rho_p \cdot \rho_n} = \frac{\Gamma_{ZN}}{2} A^{3/2} e^{E_{ZN}/kT}$, das die relative Häufigkeit der Kerne bestimmt, sind die drei Parameter Protonendichte ρ_p , Neutronendichte ρ_n und Temperatur T nicht unabhängig voneinander wählbar, sondern sie sind durch das Gleichgewicht der β -aktiven Umwandlungen zwischen Protonen und Neutronen miteinander verknüpft. Die Verf. untersuchen die Beziehung zwischen diesen drei Parametern und überhaupt das vollständige thermische

Gleichgewicht der Materie in dem angegebenen Zustandsbereich, wobei sie berücksichtigen, daß 1. das Massenverhältnis M/m von Proton zu Elektron wegen der relativistischen Massenveränderlichkeit des Elektrons durch einen temperaturabhängigen Faktor zu ersetzen ist; 2. bei hohen Elektronendichten ϱ_{e-} mit einem von ϱ_{e-} abhängigen Entartungsfaktor multipliziert werden muß; 3. die Bedingung der elektrischen Neutralität nicht durch $\varrho_p = \varrho_{e-}$, sondern durch die Beziehung $\varrho_p + \sum_{ZN} Z \cdot \varrho_{ZN} + \varrho_{e+} - \varrho_{e-} = 0$ gegeben ist (und zwar wegen der Vakuumdissoziation und weil die Bindungsenergien der Kerne groß gegenüber den betrachteten kT -Werten sind und deshalb schon bei verhältnismäßig geringen Dichten die Tendenz zur Kernbildung, zumindest Bildung von α -Teilchen vorliegt) und 4. im Massenwirkungsgesetz auch die Neutrinodichte entsprechend der Reaktion $n = p + e^- + \nu$ eingehen müßte, falls die β^- -Emission immer mit der Emission eines Neutrinos (ν) und umgekehrt die β^+ -Emission bzw. Elektronen-capture mit der Emission eines Antineutrinos (ν^+) verknüpft sind. Die Ergebnisse werden an Hand graphischer Darstellungen diskutiert.

H. Vogt (Heidelberg).

Reiz, Anders: A perturbation problem in the theory of stellar structure. Ark. Mat. Astron. Fysik A 35, Nr. 29, 15 S. (1948).

Ausgehend von dem sogenannten „Standard-Modell“, dem die das Problem stark vereinfachende Annahme zugrunde liegt, daß der Ausdruck $\kappa \eta = \kappa \frac{L(r)}{M(r)} : \frac{L}{M}$ für das ganze Innere eines Sternes als eine Konstante angesetzt werden kann, führt Verf. die Analyse des Sterninneren durch, unter der Voraussetzung, daß $\kappa \eta$ innerhalb enger Grenzen variiert. Insbesondere behandelt er in diesem Rahmen die Fälle, in denen $\kappa \propto \rho T^{-3,5}$ und $\varepsilon \propto T^n$ ($n = 1, 2, 3, 4$) ist. Dabei macht er Gebrauch von einer Störungstheorie, die im Prinzip zuerst von B. Strömgren und S. Chandrasekhar entwickelt wurde. Es bedeuten: ρ die Dichte der Sternmaterie, T ihre Temperatur, κ den Opazitätskoeffizienten, ε die pro Massen- und Zeiteinheit freierwerdende Energiemenge, $M(r)$ den Teil der Sternmasse, der innerhalb der Kugel mit dem Radius r liegt, M die Gesamtmasse des Sternes, $L(r)$ den Nettostrom an Energie, der im Sterninneren durch die Kugelfläche mit dem Radius r nach außen fließt, und L die Leuchtkraft des Sternes.

H. Vogt (Heidelberg).

Auluck, F. C. and D. S. Kothari: A note on the minimum radius for degenerate stellar masses. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. s. 38, 368—370 (1947).

In einer früheren Arbeit über das obige Thema haben die beiden Autoren das Virialtheorem in der Form $2K + W = 0$ (W = potentielle Energie der Konfiguration; K = gesamte kinetische Energie aller die Konfiguration bildenden Partikeln) nicht nur auf den nichtrelativistischen, sondern unkorrekterweise auch auf den relativistischen Fall angewandt. Sie geben nun die allgemeine Form des Virialtheorems, die auch den Effekten der relativistischen Mechanik Rechnung trägt. Sie lautet:

$$\sum \frac{\varepsilon + 2\varepsilon m c^2}{\varepsilon + m c^2} + W = 0, \text{ wenn } \varepsilon = m c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right\}$$

die kinetische Energie einer Partikel bedeutet, und sie geht im streng nicht-relativistischen Fall ($\frac{\varepsilon}{m c^2} \rightarrow 0$) über in $2T + W = 0$ und im streng relativistischen Fall ($\frac{\varepsilon}{m c^2} \rightarrow \infty$) in $T + W = 0$, wobei $T = \sum \varepsilon$ die gesamte kinetische Energie aller Partikeln ist.

H. Vogt (Heidelberg).

Pal, G. and G. Bandyopadhyay: Note on homologous and adiabatic radial motion of a star. Bull. Calcutta math. Soc. 40, 64—68 (1948).

Es wird untersucht, unter welchen Bedingungen sich ein Stern in homologer Weise adiabatisch ausdehnen oder zusammenziehen kann. Das Ergebnis ist: Wenn $\gamma \neq \frac{4}{3}$ ist (γ = Verhältnis der spezifischen Wärmen), kann nur ein homogener

Stern solche Bewegungen ausführen. Für $\gamma = \frac{4}{3}$ ist dagegen auch bei einem nicht-homogenen Stern eine homologe und adiabatische radiale Bewegung möglich; es muß zwar dann außer der Kontinuitätsgleichung noch die Anfangsbedingung $-\frac{B}{r_0} = 4\pi \frac{dP_0}{dm} + \frac{G \cdot m}{r_0^4}$ erfüllt sein, wobei P den Druck im Abstand r vom Sternzentrum und m die Masse innerhalb der Kugel mit dem Radius r bedeuten und B irgendeine Konstante ist. Homologe und adiabatische radiale Bewegungen mit Schwingungscharakter sind nur bei homogenen Sternen bzw. Gaskugeln möglich, und zwar muß dann $\gamma > \frac{4}{3}$ sein.

H. Vogt (Heidelberg).

Prasad, Chandrika: Radial oscillations of a particular stellar model. Monthly Not. astron. Soc., London 108, 414—416 (1948).

Es werden die radialen Schwingungen eines Sternmodells untersucht, das aus einer zentralen Punktmasse und einer Hülle konstanter Dichte besteht. Ausgangsgleichung ist die Differentialgleichung für kleine radiale Schwingungen in der Form, wie sie von Eddington gegeben wurde

$$\frac{d^2 \xi_1}{d\xi_0^2} + \frac{4 - \mu}{\xi_0} \frac{d\xi_1}{d\xi_0} + \left(\frac{n^2 \varrho_0}{\gamma P_0} - \frac{\alpha \mu}{\xi_0^2} \right) \xi_1 = 0,$$

wobei $\xi_1 = \delta \xi_0 / \xi_0$, $\mu = g_0 \varrho_0 \xi_0 / P_0$, $\alpha = 3 - 4/\gamma$ und $n = 2\pi \nu$ gesetzt ist und γ das Verhältnis der spezifischen Wärmen, ν die Schwingungsfrequenz bedeuten. Gezeigt wird, daß eine algebraische Lösung möglich ist, wenn die zentrale Punktmasse gleich einem Drittel der Gesamtmasse des Sternes ist.

H. Vogt.

Krat, B.: Über die Rolle der Rotation in der Evolution der Sterne. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 59, 455—458 (1948) [Russisch].

Es wird gezeigt, daß ein Stern durch Strahlung und korpuskularen Massenverlust Drehimpuls verliert. Der prozentuale Verlust an Drehimpuls überwiegt den prozentualen Verlust an Masse, da die fliehenden Massen aus den Oberflächenschichten austreten, die am Gesamtdrehimpuls des Sterns stärker beteiligt sind als das Sterninnere. Unter der Voraussetzung konstanter Dichte müßte die Sonne von dem Zeitpunkt, in dem sie das Gesamtdrehmoment des Planetensystems besaß, bis jetzt rund den elffachen Betrag ihrer gegenwärtigen Masse verloren haben.

W. Fricke (Hamburg).

Weizsäcker, C. F. von: Zur Kosmogonie. Z. Astrophys. 24, 181—206 (1948).

Eine morphologische Gruppierung der Sternsysteme, Sternhaufen und Sternwolken in Wolken, Rotationsfiguren und Kugeln führt zu dem Schluß, in diesen drei Gruppen Entwicklungsstadien zu sehen, die in der angeführten Reihenfolge auseinander hervorgehen. Die wolkenhaften Gebilde zeichnen sich durch turbulenten inneren Bewegungszustand aus. Sie werden als die Anfangsstadien der Systeme angesehen. Weit geöffnete Spiralnebel gehören zu dieser Klasse. Während die turbulente innere Bewegung unter Abgabe von Masse und Drehimpuls in den internebularen Raum erlischt, bilden sich Rotationsfiguren aus (z. B. elliptische Nebel). Aus ihnen gehen im Endzustand kugelförmige Systeme hervor (Kugelnebel, Kugelsternhaufen), die nur noch geringen Drehimpuls haben. Die Entwicklung eines Spiralnebels ist danach durch das Zusammenwirken von Turbulenz und Rotation bestimmt. Die Genetik der Sternsysteme wird auch auf Einzelsterne übertragen. Sterne mit großem Drehimpuls (*O*-, *B*- und *A*-Sterne) sollen genetisch jung und solche mit kleinem Drehimpuls (z. B. die Sonne, spätere Spektraltypen) genetisch alt sein. Dieses Alterskriterium der Sterne führt zum gleichen Ergebnis wie andere Kriterien der Astrophysik.

W. Fricke (Hamburg).

Hoyle, F.: A new model for the expanding universe. Monthly Not. astron. Soc., London 108, 372—382 (1948).

Ziel der Arbeit ist die Vermeidung vermeintlicher Schwierigkeiten in der üblichen Friedmann-Lemaîtreschen Kosmologie. Durch Einführung der Vorstellung, daß Materie kontinuierlich neu entsteht, wird im Rahmen der Allgemeinen Rela-

tivitätstheorie unter Verzicht auf eine kosmologische Konstante ein Weltmodell geschaffen, das nicht nur räumlich homogen und isotrop ist, sondern dessen Materiedichte — trotz dauernder Expansion — zeitlich konstant bleibt. Unter den möglichen Modellen wird das von euklidischer Metrik näher untersucht. *Heckmann.*

Ludwig, Günther und Claus Ernst Friedrich Müller: Ein Modell des Kosmos und der Sternentstehung. Arch. Math., Oberwolfach 1, 80—82 (1948).

Ausgehend von den Feldgleichungen der projektiven Relativitätstheorie mit feldabhängiger Gravitationskonstante wird der Weg zu zweien ihrer Lösungen kurz skizziert, die auf der Voraussetzung ruhender bzw. mit Lichtgeschwindigkeit bewegter Materie beruhen. Während die erste Lösung, die durch ein reziprokes Verhältnis von Gravitationsinvariante und Weltalter charakterisiert ist, im Anschluß an ältere qualitative Überlegungen Jordans mit dem Universum identifiziert werden kann, liegt für die zweite Lösung eine Deutung derselben als Theorie der Sternentstehung nahe. Ihr Hauptverdienst wäre eine Erklärung für das beobachtete Maximum der Sternmassen von 10^{60} Protonenmassen. *Brauer (Berlin).*

George, E. P.: Milne's cosmology and the origin of cosmic rays. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. s. 39, 240—243 (1948).

E. A. Milne hat versucht, im Rahmen seiner kosmologischen Theorien auch eine Erklärung für die Entstehung der kosmischen Strahlung zu geben. Verf. will nun zeigen, daß die Milnesche Kosmologie nicht nur ein allgemeines qualitatives Bild von der Entstehung der kosmischen Strahlung zu vermitteln vermag, sondern daß sie auch gestattet, einen Ausdruck für das Energiespektrum abzuleiten, der ziemlich gut die Beobachtungen darzustellen scheint. *H. Vogt (Heidelberg).*

Gião, Antonio: Sur l'effet mécano-magnétique à l'intérieur des masses sphériques en rotation. Application au champ magnétique terrestre. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 645—647 (1948).

L'A. a indiqué antérieurement que sa théorie unitaire de la gravitation et de l'électromagnétisme [Portugaliae Math. 5, 145—192 (1946) et 6, 67—114 (1947)] prévoit un effet Blackett c'est-à-dire la création d'un champ magnétique par la rotation de toute masse même non électrisée. Il rappelle ici ses formules antérieures pour le moment magnétique et pour le champ magnétique créé à l'extérieur de la masse, puis applique la même méthode à l'étude des expériences de Hales et Gough [Nature, London 160, 746 (1947)] effectuées au fond d'un puits de mine. Une formule théorique approchée donnant la grandeur de la composante horizontale du champ magnétique intérieur en fonction de la profondeur est construite et comparée aux résultats expérimentaux et aux formules proposées par Runcorn et Chapman. *Lichnerowicz (Strasbourg).*

Gião, Antonio: Sur le champ magnétique à l'intérieur de la terre. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 1298—1300 (1948).

Cette seconde note (voir ref. précédent) étudie en détail la variation des composantes horizontale et verticale du champ magnétique intérieur à la Terre en fonction de la profondeur. Comme les précédents, ces résultats sont déduits essentiellement de la théorie unitaire de l'A. *Lichnerowicz (Strasbourg).*

Proudman, J.: On the mixing of sea water by turbulence. Proc. R. Soc. London A 195, 300—309 (1948).

Die Taylorsche Theorie der Mischungsbewegung wird auf die Änderung der Salzgehaltverteilung im Meer angewendet, wobei die Korrelation zwischen gewissen turbulenzabhängigen Größen im Zeitpunkt 1 und anderen im Zeitpunkt 2 zu Null angenommen wird, wenn die Zeitdifferenz ein bestimmtes Minimum überschreitet. Nur in einfachen Fällen hängen die Koeffizienten der Wirbelballendiffusion nicht von der Salzgehaltverteilung, sondern nur von der Turbulenz ab, z. B. im Falle der Irischen See, für deren Strömung eine mittlere Geschwindigkeit von $2,5 \text{ cm sec}^{-1}$ errechnet wird. *Pretsch (Göttingen).*